ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Α)

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2021

(**1**) (*i*) Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0^+} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι 0 για $a > 0$ και δεν υπάρχει για $a < 0$. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν $a > 0$.

(*ii*) Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0^+} x^a \sin x$ είναι 0 για $a > -1$ είναι 1 για $a = -1$, και είναι $+\infty$ για $a < -1$. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν $a > -1$.

(**2**) Αφού $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ υπάρχει $M > 0$ ώστε $0 \leq f(x) \leq f(0) = \log 2$ για κάθε $|x| \geq M$. Από θεώρημα μεγίστου η f λαμβάνει μέγιστη τιμή στο $[-M, M]$ έστω σε κάποιο $a \in [-M, M]$. Τότε $f(x) \leq f(a)$ για κάθε $x \in [-M, M]$ και αφού $f(a) \geq f(0)$ έχουμε $0 \leq f(x) \leq f(a)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι φραγμένη και λαμβάνει την μέγιστη τιμή της για $x = a$.

(**3**) Η υπόθεσή μας δίνει ότι $f(x) = f(\sqrt{x})$ για κάθε $x > 0$. Άρα $f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{2^2}}) = \cdots = f(x^{\frac{1}{2^n}})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$ όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f είναι συνεχής στο 1, και ότι $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$ για κάθε $x > 0$.

(**4**) (*i*) $f(x) = x^2 + 1 - \frac{100}{x^4+\sin x+1}$. $f(0) < 0$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Οπότε υπάρχουν $a < 0$ και $b > 0$ ώστε $f(a) > 0$ και $f(b) > 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα *Bolzano* στα διαστήματα $[a, 0]$ και $[0, b]$ και παίρνουμε το ζητούμενο.

(*ii*) Εάν $P = c \neq 0$ το ζητούμενο είναι προφανές. Αλλιώς $\lim_{x\to-\infty} |P(x)| = +\infty$. Θέτουμε $f(x) = e^x - |P(x)|$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και επιχειρηματολογήστε όπως πριν.

(**5**) (*i*) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $x_n \in \mathbb{Q}$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Τότε $0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι η f είναι συνεχής στο x.

(*ii*) Από το (*i*) προκύπτει ότι $(f(x))^2 = (g(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και αφού και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς, με χρήση του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής δείχνουμε (όπως στην τάξη) ότι η f έχει σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και το ίδιο ισχύει για την g. Εάν έχουν το ίδιο πρόσημο παίρνουμε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ αν έχουν διαφορετικό πρόσημο παίρνουμε $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**6**) (*i*) Θέτουμε $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει λύση στο $[0, 1]$. Αν δεν ισχύει αυτό, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έχουμε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $f(0) < f(1) < f(2)$, άτοπο από την υπόθεσή μας. Παρόμοια παίρνουμε άτοπο στην δεύτερη περίπτωση.

(*ii*) Θέτουμε $g(x) = f(x+1) - f(x)$ και συνεχίζουμε όπως στο (*i*).

(**7**)* Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει συνεχής $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς 2 φορές. Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι η f λαμβάνει την τιμή 0 δύο φορές και ότι $f(0) = f(1) = 0$. Τότε η f δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, και αφού είναι συνεχής, έχει σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

Έστω ότι είναι θετική στο $(0, 1)$ (το επιχείρημα είναι παρόμοιο αλλιώς). Υποθέτουμε ότι στο $[0, 1]$ η f λαμβάνει την μέγιστη τιμή της στο σημείο $a \in (0, 1)$ και $f(a) = b > 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και την υπόθεση μας, προκύπτει ότι η f λαμβάνει όλες τις τιμές στο $(0, b)$ ακριβώς μία φορά σε καθένα από τα διαστήματα $(0, a)$ και $(a, 1)$ (και άρα η f λαμβάνει την τιμή b μόνο μία φορά στο $(0, 1)$). Από αυτό και την υπόθεση μας προκύπτει ότι η f είναι αρνητική στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(1, +\infty)$.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η f παίρνει την τιμή b ακριβώς μία φορά στο σημείο a, άτοπο.

Κατασκευάστε μία τμηματικά γραμμική συνάρτηση και συνεχή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς 3 φορές.
