

(1) Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{Z}$ είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

παραγωγίσιμη; Δύο φορές παραγωγίσιμη;

(2) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \geq 0$ έχουμε

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

(3) Από τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με όγκο 1 τα οποία έχουν τουλάχιστον δύο κάθετες πλευρές ίσες να βρεθεί αυτό με την ελάχιστη επιφάνεια.

(4) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ισχύει η ανισότητα

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x.$$

(5) Έστω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx)| \leq |\sin x|.$$

Δείξτε ότι $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

(6) Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $f(0) = 0$, $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

(i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(ii) Εάν επιπλέον ισχύει $f'(0) \geq 0$, δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x^2)}{f(x)} = +\infty$.

(7)* Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $f(0) = 0$ και $|f'(x)| \leq 2021 |f(x)|$ για κάθε $x \in [0, 1]$.
