ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Υποδείξεις.

(1) Το θεώρημα *Taylor-Lagrange* για την $f(x) = \log(1+x)$ με κέντρο το $a = 0$ δίνει ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi_x \in (0, x)$ ώστε $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{(1+\xi_x)^3}\frac{x^3}{3}$. Οι ζητούμενες ανισότητες προκύπτουν άμεσα.

(2) Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, όπως έχουμε δει, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = c\,e^x$. Η αρχική εξίσωση για $x = 0$ δίνει $f(0) = 1$, οπότε $c = 1$.

(3) Τα ζητούμενα όρια είναι ίσα με

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\Big) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\Big) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x}\Big]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

(4) *(i)* Αρχικά παρατηρούμε ότι $\int_x^{x+1} e^{t^2}\,dt \geq e^{x^2}(x+1-x) = e^{x^2}$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} e^{t^2}\,dt = +\infty$. Οπότε κάνοντας χρήση *l'Hospital* έχουμε ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^{x+1} e^{t^2}\,dt - \int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(x+1)^2} - e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(x+1)^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x+1}e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = +\infty.$$

(ii) Έχουμε $\int_n^{2n} \frac{1}{1+x^3}\,dx \leq \frac{1}{1+n^3}(2n-n) \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \int_n^{2n} \frac{1}{1+x^3}\,dx$ συγκλίνει.

(5) *(i)* $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \overset{u=1+e^x}{=} \int_2^{1+e} \frac{1}{u}\,du = \log(e+1) - \log 2.$

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = 1 - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = 1 - \log(e+1) + \log 2.$

(iii) $\int \log(x^2+1)\,dx = x\,\log(x^2+1) - \int x\,\frac{2x}{x^2+1}\,dx = x\,\log(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx =$

$x\,\log(x^2+1) - 2 + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = x\,\log(x^2+1) - 2 + 2\arctan x$

(iv) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \overset{u=\sqrt{x}}{=} 2\int u\,e^u\,du = 2u\,e^u - 2\int e^u\,du = 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}.$

*(v)** Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποιος/κάποια την λύσει με ενημερώνει για να τον/την συγχαρώ.

(6) *(i)* Εφαρμόζουμε το θεώρημα *Taylor-Lagrange* για την f στο διάστημα $[x, x+1]$ (δηλαδή με κέντρο το $a = x$). Παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_x \in (x, x+1)$ ώστε

$$f(x+1) = f(x) + f'(x)(x+1-x) + \frac{1}{2}\,f''(\xi_x)(x+1-x)^2 = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}\,f''(\xi_x).$$

(ii) Εφαρμόζουμε το (i). Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $\xi_x > x$ έχουμε $\lim_{x\to+\infty} \xi_x = +\infty$, άρα $\lim_{x\to+\infty} f''(\xi_x) =^{y=\xi_x} \lim_{y\to+\infty} f''(y) = 0$. Οπότε εάν $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2} f''(\xi_x)\big) = L - L + 0 = 0.$$

(iii) Η υπόθεση $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$ είναι αναγκαία. Πχ αν $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ όμως $f'(x) = 2\sin(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$, οπότε το όριο $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ δεν υπάρχει.

---

(7)* Παρατηρούμε ότι $\log(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}) = \frac{1}{n}(\log 1 + \cdots + \log n - \log n) = \frac{1}{n}\big(\log(\frac{1}{n}) + \cdots + \log(\frac{n}{n})\big)$

Άρα[1] $\lim_{n\to\infty} \log(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}) = \int_0^1 \log t\, dt = -1$ και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

---

[1] Η σύγκλιση στο γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \log t\, dt$ προκύπτει από την ανισότητα $\int_0^1 \log t\, dt \le \frac{1}{n}\big(\log(\frac{1}{n}) + \cdots + \log(\frac{n}{n})\big) \le \int_0^{1+\frac{1}{n}} \log t\, dt$. Αυτό μπορεί να δειχθεί γραφικά χρησιμοποιώντας ότι η $\log t$ είναι αύξουσα.