

Τελική Εξέταση, Σεπτέμβριος 2026.

Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά από μιάνμιση ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2\sqrt{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^n + n^2}\right).$$

(2) (2 μονάδες) Εξετάστε για ποια $x \in \mathbb{R}$ η παρακάτω σειρά συγκλίνει

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \log n}.$$

(3) (i) (1.5 μονάδες) Εξετάστε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(x^a) & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο 0 και για ποιες τιμές είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(ii) (1 μονάδα) Δείξτε ότι για $a = 1$ η εξίσωση $f(x) = 2026$ έχει άπειρες λύσεις ενώ για $a = -1$ δεν έχει καμία λύση.

(4) (i) (1 μονάδα) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16\sqrt{2}}.$$

(ii) (1.5 μονάδες) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)\sqrt{x} = 1$. Δείξτε ότι η παρακάτω σειρά συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{n}.$$

(5) (2 μονάδες) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα (το τρίτο ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο)

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^3 dx, \quad \int \frac{1}{x(x^2 - 1)} dx, \quad \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \log x dx.$$

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.