

Απειροστικός Ι

Τελική εξέταση Ιανουαρίου 2026

Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μιάνμιση ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (-1)^{[1/x]} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Εξετάστε αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0 και υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

(2) (2 μονάδες) (i) Εάν p πολυώνυμο, δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\int_0^{x^2} e^{t^2} dt - p(x) \right) = +\infty$.

(ii) Εάν $a \in \mathbb{R}$ και $b > 0$, δείξτε ότι η εξίσωση

$$\int_0^{x^2} e^{t^2} dt = ax + b$$

έχει ακριβώς 2 πραγματικές λύσεις.

(3) (2.5 μονάδες) (i) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sqrt{n}}$.

(ii) Εάν $a \geq 2$ και $x \geq 0$, δείξτε ότι

$$1 + ax \leq (1 + x)^a \leq 1 + ax + \frac{1}{2}a(a-1)(1+x)^{a-2}x^2.$$

(iii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sqrt{n}} - 1 \right)$.

(4) (3 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα (το τελευταίο είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα)

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(\sin x + 1)(\sin x + 2)} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx.$$

(ii) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}.$$

(5) (1.5 μονάδες) Εάν $a < b$, δείξτε ότι

$$e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < \frac{e^a + e^b}{2}.$$

(Για τη δεξιά ανισότητα σκεφτείτε εμβαδά.)

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.