

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2025

(1) Δείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$ είναι άρρητος.

(2) (i) Δείξτε ότι το σύνολο $\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο $\{\frac{m^2}{n^2} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[0, \infty)$.

(3) Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες (x_n) είναι (τελικά) μονότονες; Φραγμένες;

(i) $((-1)^{n^2}n)$, (ii) $(\sin(n\pi/4))$, (iii) $(n - 2[n/2])$.

(4) (i) Δείξτε ότι $2^n \geq n^2$ για κάθε $n \geq 4$.

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία $x_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι τελικά φθίνουσα και φραγμένη.

(5) Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες;

(i) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(6) Έστω a_n φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$x_n = a_1 - a_2 + a_3 + \dots + (-1)^{n-1}a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι η ακολουθία $y_n = x_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσα και φραγμένη.

(7)* (i) Δείξτε ότι για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{\{10^n\alpha\}, n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

(ii) Δείξτε ότι για κάποιο $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ το σύνολο $\{\{10^n\beta\}, n \in \mathbb{N}\}$ **δεν** είναι πυκνό στο $[0, 1]$.