

(1) Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{1}{x^4-1} dx, \quad (ii) \int \frac{\log(x^2+1)}{x^4} dx.$$

(2) (i) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sin(\log x) dx$.

(ii) Εάν $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$, δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$, και υπολογίστε τα I_{10}, I_{11} .

(iii)* Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2026}}{(\cos x)^{2026} + (\sin x)^{2026}} dx$.

(3) (i) Δείξτε ότι η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή αν και μόνο αν για κάθε $a > 0$ ισχύει $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{101}}{x^{100} + 1} dx.$$

(4) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(i) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx, \quad (ii) \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx, \quad (iii) \int \log(x^2 + 1) dx,$$

$$(iv) \int e^{\sqrt{x}} dx, \quad (v)^* \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x} dx.$$

(5) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

(6) Εξετάστε ποια από τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν:

$$(i) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx, \quad (ii) \int_1^2 \frac{1}{x(\log x)^2} dx, \quad (iii) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx,$$

$$(iv) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx, \quad (v) \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx, \quad (vi) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx.$$

(7)* Εξετάστε εαν συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^{2025}) dx.$$