

(1) (i) Ψάχνουμε για $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+b}{x^2+1}$. Με την μέθοδο που είδαμε στην τάξη βρίσκουμε $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = 0, d = -\frac{1}{2}$. Οπότε $\int \frac{1}{x^4-1} dx = \frac{1}{4} \log|x-1| - \frac{1}{4} \log|x+1| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x$.

(ii) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες βρίσκουμε $\int \frac{\log(x^2+1)}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{\log(x^2+1)}{x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$. Ψάχνουμε για $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$. Με την μέθοδο που είδαμε στην τάξη βρίσκουμε $a = 0, b = -1, c = 0, d = 1$. Οπότε $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx = -\frac{1}{x} - \tan^{-1} x + C$ και $\int \frac{\log(x^2+1)}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{\log(x^2+1)}{x^3} - \frac{2}{3} \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \tan^{-1} x + C$.

(2) (i) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες δύο φορές παίρνουμε $\int \sin(\log x) dx = x \sin(\log x) - x \cos(\log x) - \int \sin(\log x) dx$. $\int \sin(\log x) dx = \frac{1}{2} x (\sin(\log x) - \cos(\log x)) + C$.

(ii) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες και χρησιμοποιώντας ότι $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ παίρνουμε

$$I_n = - \int_0^{2\pi} ((\sin x)^{n-1})' (-\cos x) dx = (n-1) \int_0^{2\pi} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Επίσης έχουμε $I_0 = \frac{\pi}{2}$ και $I_1 = 1$. Οπότε

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} I_{2(n-2)} = \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 5 \cdot 3} I_0 \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 5 \cdot 3} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Παρόμοια παίρνουμε $I_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5 \cdot 3} I_1 = \frac{(2n)(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5 \cdot 3}$.

(iii)* Θέτουμε $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2026}}{(\cos x)^{2026} + (\sin x)^{2026}} dx$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{\pi}{2} - x$ παίρνουμε $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{2026}}{(\cos x)^{2026} + (\sin x)^{2026}} dx$. Άρα $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2026} + (\sin x)^{2026}}{(\cos x)^{2026} + (\sin x)^{2026}} dx = \frac{\pi}{2}$. Όποτε $I = \frac{\pi}{4}$.

(3) (i) Αν η f είναι περιττή $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-y) dy + \int_0^a f(y) dy = -\int_{-a}^0 f(y) dy + \int_0^a f(y) dy = -\int_{-a}^a f(y) dy = -\int_{-a}^a f(x) dx$. Άρα $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Έστω τώρα ότι $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $F(a) = \int_{-a}^a f(x) dx = 0$. Τότε $F'(a) = f(a) + f(-a) = 0$, άρα $f(-a) = -f(a)$.

(ii) Η συνάρτηση $\frac{x^{101}}{x^{100}+1}$ είναι περιττή, άρα $\int_{-1}^1 \frac{x^{101}}{x^{100}+1} dx = 0$ από το (i).

(4) (i) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_2^{1+e} \frac{1}{u} du = \log(e+1) - \log 2$.

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = 1 - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = 1 - \log(e+1) + \log 2$.

$$(iii) \int \log(x^2 + 1) dx = x \log(x^2 + 1) - \int x \frac{2x}{x^2+1} dx = x \log(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$$

$$x \log(x^2 + 1) - 2 + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = x \log(x^2 + 1) - 2 + 2 \arctan x$$

$$(iv) \int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{u=\sqrt{x}}{=} 2 \int u e^u du = 2u e^u - 2 \int e^u du = 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}.$$

(v)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποιος/κάποια την λύσει με ενημερώνει για να τον/την συγχαρώ.

(5) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\int_a^b f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{n} (f(b) \sin(nb) - f(a) \sin(na)) - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin(nx) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

αφού $\left| \frac{1}{n} (f(b) \sin(nb) - f(a) \sin(na)) \right| \leq \frac{|f(a)|+|f(b)|}{n}$ και

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin(nx) dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |f'(x) \sin(nx)| dx \leq \frac{C}{n} \text{ όπου } C = \int_0^{2\pi} |f'(x)| dx.$$

$$(6) (i) \int_2^y \frac{1}{x(\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log 2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log 2}. \text{ Αρα } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \frac{1}{\log 2}.$$

$$(ii) \int_y^2 \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log y} \xrightarrow{y \rightarrow 1^+} +\infty. \text{ Αρα } \int_1^2 \frac{1}{x(\log x)^2} dx = +\infty.$$

$$(iii) \int_y^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log y} \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log 2}. \text{ Αρα } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log 2}.$$

$$(iv) \int_0^y \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} y - \tan^{-1} 0 \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \text{ και } \int_y^0 \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} 0 - \tan^{-1} y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2}. \\ \text{Αρα } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi.$$

(v) Έχουμε $\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x}$ για $x \in (0, 1]$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ αποκλίνει στο $+\infty$. Από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx = +\infty$.

(vi) Έχουμε $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ και $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx < +\infty$. Από το κριτήριο σύγκρισης το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$ συγχλίνει.

(7)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποιος/κάποια την λύσει με ενημερώνει για να τον/την συγχαρώ.
