

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2025

(1) Υπολογίστε τα όρια:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}.$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n+1}.$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\log n}.$

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{n}.$

(2) Εξετάστε εάν οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν τελικά:

(i) $2^n \geq n^{100}.$

(ii) $n^2 \geq 10n + (\log n)^{10}.$

(iii) $\sqrt{n} - \log n \sin n + 1 \geq 0.$

(iv) $2n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1.$

(3) Υπολογίστε τα όρια:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2}.$

(4) Έστω (x_n) ακολουθία ώστε $x_n > 0$ τελικά. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ εάν:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{1}{2}.$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1+x_n} = 1.$

(5) Υπολογίστε τα όρια:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (1^{2021} + 2^{2021} + \dots + n^{2021}).$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} (1^1 + 2^2 + \dots + (n-1)^{n-1} + n^n).$

(6)* (i) Δείξτε ότι αν το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2^n)$ υπάρχει, τότε είναι 0.

(ii) Δείξτε ότι το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2^n)$ δεν υπάρχει.