ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2025
Υποδείξεις.

---

(1) (i) $1-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq 1$. Αρα $\lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} = 1$.

(ii) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n+1} = \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^3 \left(1+\frac{2}{n}\right) \to e^6$

(iii) $1 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\log n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{\log n}{n}} \leq 3^{\frac{\log n}{n}}$ τελικά και $3^{\frac{\log n}{n}} \to 1$. Αρα $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\log n} \to 1$.

(iv) $\frac{(\log n)^{\log n}}{n} = \frac{e^{\log n \cdot \log\log n}}{e^{\log n}} = e^{\log n\cdot \log\log n - \log n} \to +\infty$.

---

(2) Όλες οι ανισότητες ισχύουν τελικά αφού:

(i) $\lim_{n\to\infty}(2^n - n^{100}) = \lim_{n\to\infty} 2^n\,(1-\frac{n^{100}}{2^n}) = +\infty$.

(ii) $\lim_{n\to\infty}(n^2 - 10\,n - (\log n)^{10}) = \lim_{n\to\infty} n^2\,(1-\frac{10}{n} - \frac{(\log n)^{10}}{n^2}) = +\infty$.

(iii) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n} - \log n\,\sin n + 1) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(1-\frac{\log n\,\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}) = +\infty$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} 2n\,\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2\log e = 2$.

---

(3) (i) Έστω $x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$. Τότε $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \to 0$. Αρα $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(ii) Έστω $x_n = \frac{2^{n^2}}{(n!)^2}$. Τότε $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{2n+1}}{(n+1)^2} \to +\infty$. Αρα $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

---

(4) Έστω $y_n = \frac{x_n}{1+x_n}$. Τότε $y_n < 1$ τελικά και $x_n = \frac{y_n}{1-y_n}$.

(i) Αφού $y_n \to \frac{1}{2}$ έχουμε $x_n \to \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

(ii) Έχουμε $y_n \to 1$ και $\frac{1}{2} \leq y_n < 1$ τελικά. Αρα $x_n = \frac{y_n}{1-y_n} \geq \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-y_n} \to +\infty$.

---

(5) (i) $0 \leq \frac{1}{2^n}(1^{2021} + 2^{2021} + \cdots + n^{2021}) \leq \frac{n\,n^{2021}}{2^n} = \frac{n^{2022}}{2^n} \to 0$.

$$
\begin{aligned}
(ii)\ 1 = \frac{n^n}{n^n} &\leq \frac{1}{n^n}(1^1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^{n-1} + n^n)\\
&\leq \frac{1}{n^n}(n^{n-2} + \cdots + n^{n-2} + n^{n-1} + n^n) = \frac{n-2}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 \to 1.
\end{aligned}
$$

---

(6)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποιος/κάποια την λύσει με ενημερώνει για να τον/την συγχαρώ.
