

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2025

(1) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right),$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \left(\frac{1}{n} \right),$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!},$ (iv) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n},$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \left(\frac{1}{n^2} \right),$

(2) Εξετάστε για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ συγκλίνουν οι σειρές:

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{n \log n},$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a (\log n)^2}.$

(3) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}.$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}.$

(4) Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n} < +\infty$$

(5)* Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια ώστε $x_n > 0, n \in \mathbb{N}$. Ισχύει πάντα ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(x_1 + \dots + x_n)^2} < +\infty;$$

(Αν ναι απόδειξη, αν όχι αντιπαράδειγμα.)
