

**4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2025**

- (1) (i)  $y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{(\sqrt{n^2+n}+n)\sqrt{n^2+n}}$ , άρα  $\frac{y_n}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{2}$ , οπότε η σειρά συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης (ή  $y_n \leq \frac{1}{n^2}$  οπότε η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης).
- (ii)  $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$  φθίνει στο 0, άρα η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.
- (iii)  $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ,  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{1}{4}$ , άρα η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο λόγου.
- (iv)  $x_n = \frac{1}{(\log n)^n}$ ,  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(\log n)^n}{(\log(n+1))^{n+1}} \leq \frac{(\log n)^n}{(\log n)^{n+1}} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0$ , άρα η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο λόγου. Αλλιώς:  $\frac{1}{(\log n)^n} \leq \frac{1}{2^n}$ , για  $n \geq e^2$ , οπότε συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.
- (v)  $x_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ,  $\frac{x_n}{\frac{1}{n}} = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 1$ , άρα η σειρά αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(2) (i) Το κριτήριο λόγου δίνει ότι η σειρά συγκλίνει για  $|a| < 1$  και αποκλίνει για  $|a| > 1$ . Για  $a = 1$  έχουμε δει ότι η σειρά αποκλίνει. Για  $a = -1$  η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.

(ii) Αν  $a = 1$  έχουμε δει ότι η σειρά συγκλίνει. Αν  $a > 1$  η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης, συγκρίνετε με την  $\frac{1}{n^a}$ . Αν  $a < 1$  η σειρά αποκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης, συγκρίνετε με την  $\frac{1}{n}$  ( $n^{1-a} > (\log n)^2$  τελικά).

(3) (i)  $\frac{\frac{1}{e\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{e\sqrt{n}}}{\frac{1}{e^{2\log n}}} = e^{2\log n - \sqrt{n}} \rightarrow 0$ , αφού  $2\log n - \sqrt{n} \rightarrow -\infty$  (δες Φυλλάδιο 2), άρα η σειρά συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(ii)  $\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 1$ , αφού  $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}} \rightarrow e^0 = 1$ , άρα η σειρά αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(iii)  $\frac{1}{(\log n)^{\log n}} \leq \frac{1}{(e^2)^{\log n}} = \frac{1}{n^2}$  για  $n \geq e^2$ , άρα η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(4) Θέτουμε  $y_n = \frac{x_n}{1+x_n}$ . Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$ , τότε  $x_n \rightarrow 0$ , οπότε  $\frac{y_n}{\frac{1}{1+x_n}} = \frac{y_n}{\frac{1}{1+x_n}} \rightarrow 1$ , άρα η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης. (Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης και  $\frac{x_n}{1+x_n} \leq x_n$ .)

Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n < +\infty$ , τότε  $y_n \rightarrow 0$ . Έχουμε  $x_n = \frac{y_n}{1-y_n}$ , οπότε  $\frac{x_n}{\frac{1}{1-y_n}} = \frac{y_n}{1-y_n} \rightarrow 1$ , άρα η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(5)\* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποιος/κάποια την λύσει με ενημερώνει για να τον/την συγχαρώ.