

(1) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}.$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^{10})}{(\sin x)^{10}}.$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{-1} + \log x).$

(2) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right].$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \right] e^{-\frac{1}{x}}.$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}.$

(3) Εξετάστε αν τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x^2).$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}.$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\frac{1}{x}) \cdot (-1)^{[x]}.$

(4) Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ εάν ισχύει

$$x + \sqrt{|x-1|} \leq f(x) \leq x + 2\sqrt{|x-1|}.$$

για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, 2).$

(5) Έστω $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in (0, +\infty).$ Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ εάν γνωρίζετε ότι

$$x(f(x))^2 = xf(x^2) + 2$$

για κάθε $x \in [1, +\infty).$

(6)* (i) Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$$

(Πάρτε ως δεδομένο ότι η σειρά έχει θετικούς όρους.)

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$ **δεν** συγκλίνει.