

(1) (i) $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1+1/x}}{\sqrt{1+1/x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$

(ii) $\frac{\sin(x^{10})}{(\sin x)^{10}} = \frac{\sin(x^{10})}{x^{10}} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{10} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{-1} + \log x) \stackrel{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} (y - \log y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y(1 - \frac{\log y}{y}) = +\infty.$

(2) (i) $1 - x = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) \leq x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής το όριο είναι 1.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x}\right] e^{-\frac{1}{x}} \stackrel{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} [y] e^{-y} = 0$, αφού $[y] e^{-y} \leq \frac{y}{e^y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0.$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} \stackrel{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y^2}$. Το τελευταίο όριο είναι $+\infty$ από το κριτήριο σύγκρισης αφού $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \rightarrow e > 2$ και άρα $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y^2} \geq 2^y$ για μεγάλα $y \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} \stackrel{y=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{y^2}$. Το τελευταίο όριο είναι 0 από το κριτήριο σύγκρισης αφού $\left(1 - \frac{1}{y}\right)^y \rightarrow e^{-1} < \frac{1}{2}$ και άρα $\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{y^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^y$ για μεγάλα $y \in \mathbb{R}$.

(3) (i) Δεν υπάρχει, πάρτε $x_n = \sqrt{2\pi n}$, $y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$.

(ii) Δεν υπάρχει, πάρτε $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$.

(iii) $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-1)^{[x]} \right| \leq \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, άρα το όριο είναι 0.

(4) Το κριτήριο παρεμβολής δίνει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Επίσης $\frac{f(x)}{x} \geq 1 + \frac{\sqrt{|x-1|}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, άρα το κριτήριο σύγκρισης δίνει $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

(5) Έχουμε $(f(x))^2 = f(x^2) + \frac{2}{x}$. Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2) \stackrel{y=x^2}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = L$, παίρνοντας όρια έχουμε $L^2 = L$ και αφού από υπόθεση $L > 0$ παίρνουμε $L = 1$.

(6)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποιος/κάποια την λύσει με ενημερώνει για να τον/την συγχαρώ.