

(1) Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$(i) f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

$$(ii) g(x) = \begin{cases} x^a \sin x & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

(2) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\log(x^2 + 2)}{|x| + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και ότι λαμβάνει την μέγιστη τιμή της.

(3) Βρείτε όλες τις συνεχείς $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν $f(x) = f(x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(4) (i) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$x^2 + 1 = \frac{100}{x^4 + \sin x + 1}$$

έχει τουλάχιστον 2 λύσεις.

(ii) Έστω P πολώνυμο το οποίο δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$e^x = |P(x)|$$

έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση.

(5) (i) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε $(f(x))^2 = (g(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(6) (i) Έστω $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in [0, 2]$ ώστε $x - y = 1$ και $f(x) = f(y)$.

(ii) Έστω $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(0) = f(10)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in [0, 10]$ ώστε $x - y = 1$ και $f(x) = f(y)$.

(7)* Υπάρχει συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς 2 φορές; Ακριβώς 3 φορές;
