

(1) (i) Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι 0 για $a > 0$ και δεν υπάρχει για $a < 0$. 'ρα η συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν $a > 0$.

(ii) Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \sin x$ είναι 0 για $a > -1$ είναι 1 για $a = -1$, και είναι $+\infty$ για $a < -1$. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν $a > -1$.

(2) Αφού $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ υπάρχει $M > 0$ ώστε $0 \leq f(x) \leq f(0) = \log 2$ για κάθε $|x| \geq M$. Από θεώρημα μεγίστου η f λαμβάνει μέγιστη τιμή στο $[-M, M]$ έστω σε κάποιο $a \in [-M, M]$. Τότε $f(x) \leq f(a)$ για κάθε $x \in [-M, M]$ και αφού $f(a) \geq f(0)$ έχουμε $0 \leq f(x) \leq f(a)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. 'ρα η f είναι φραγμένη και λαμβάνει την μέγιστη τιμή της για $x = a$.

(3) Η υπόθεσή μας δίνει ότι $f(x) = f(\sqrt{x})$ για κάθε $x > 0$. Άρα $f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{2^2}}) = \dots = f(x^{\frac{1}{2^n}})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$ όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f είναι συνεχής στο 1, και ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$ για κάθε $x > 0$.

(4) (i) $f(x) = x^2 + 1 - \frac{100}{x^4 + \sin x + 1}$. $f(0) < 0$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Οπότε υπάρχουν $a < 0$ και $b > 0$ ώστε $f(a) > 0$ και $f(b) > 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στα διαστήματα $[a, 0]$ και $[0, b]$ και παίρνουμε το ζητούμενο.

(ii) Εάν $P = c \neq 0$ το ζητούμενο είναι προφανές. Αλλιώς $\lim_{x \rightarrow -\infty} |P(x)| = +\infty$. Θέτουμε $f(x) = e^x - |P(x)|$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και επιχειρηματολογήστε όπως πριν.

(5) (i) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $x_n \in \mathbb{Q}$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Τότε $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι η f είναι συνεχής στο x .

(ii) Από το (i) προκύπτει ότι $(f(x))^2 = (g(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και αφού και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς, με χρήση του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής δείχνουμε (όπως στην τάξη) ότι η f έχει σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και το ίδιο ισχύει για την g . Εάν έχουν το ίδιο πρόσημο παίρνουμε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ αν έχουν διαφορετικό πρόσημο παίρνουμε $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(6) (i) Θέτουμε $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει λύση στο $[0, 1]$. Αν δεν ισχύει αυτό, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έχουμε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $f(0) < f(1) < f(2)$, άτοπο από την υπόθεσή μας. Παρόμοια παίρνουμε άτοπο στην δεύτερη περίπτωση.

(ii) Θέτουμε $g(x) = f(x+1) - f(x)$ και συνεχίζουμε όπως στο (i).

(7)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποιος/κάποια την λύσει με ενημερώνει για να τον/την συγχαρώ.