

(1) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

(2) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right) = 2(\sqrt{2} - 1).$$

(4) (i) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n^2} \int_n^{n+1} e^{t^2} dt.$$

(ii) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{1+x^3} dx.$$

(5) Έστω $p \in (0, 1)$. Δείξτε ότι η παρακάτω ακολουθία είναι φραγμένη

$$1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} - \frac{n^{1-p}}{1-p}.$$

(6) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi_x \in (x, x+1)$ ώστε

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi_x).$$

(ii) Εάν το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$, δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(iii) Είναι απαραίτητη στο (ii) η υπόθεση $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$;

(7)* Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$