

(1) Το θεώρημα *Taylor-Lagrange* για την $f(x) = \log(1+x)$ με κέντρο το $a = 0$ δίνει ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi_x \in (0, x)$ ώστε $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{(1+\xi_x)^3} \frac{x^3}{3}$. Οι ζητούμενες ανισότητες προκύπτουν άμεσα.

(2) Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, όπως έχουμε δει, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = c e^x$. Η αρχική εξίσωση για $x = 0$ δίνει $f(0) = 1$, οπότε $c = 1$.

(3) Τα ζητούμενα όρια είναι ίσα με

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n}{n}}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{1+x} \Big|_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

(4) (i) Αρχικά παρατηρούμε ότι $\int_x^{x+1} e^{t^2} dt \geq e^{x^2}(x+1-x) = e^{x^2}$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} e^{t^2} dt = +\infty$. Οπότε κάνοντας χρήση *l'Hospital* έχουμε ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{x+1} e^{t^2} dt - \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{(x+1)^2} - e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{(x+1)^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x+1}e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = +\infty.$$

(ii) Έχουμε $\int_n^{2n} \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{1}{1+n^3}(2n-n) \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{1+x^3} dx$ συγκλίνει.

(5) Η βασική ανισότητα του κριτηρίου ολοκληρώματος δίνει ότι

$$\frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p},$$

από το οποίο προκύπτει εύκολα ότι $-\frac{1}{1-p} \leq x_n \leq 1 - \frac{1}{1-p}$.

(6) (i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα *Taylor-Lagrange* για την f στο διάστημα $[x, x+1]$ (δηλαδή με κέντρο το $a = x$). Παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_x \in (x, x+1)$ ώστε

$$f(x+1) = f(x) + f'(x)(x+1-x) + \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x+1-x)^2 = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi_x).$$

(ii) Εφαρμόζουμε το (i). Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $\xi_x > x$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \xi_x = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(\xi_x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f''(y) = 0$. Οπότε εάν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2} f''(\xi_x) \right) = L - L + 0 = 0.$$

(iii) Η υπόθεση $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$ είναι αναγκαία. Πχ αν $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ όμως $f'(x) = 2 \sin(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$, οπότε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ δεν υπάρχει.

(7)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποιος/κάποια την λύσει με ενημερώνει για να τον/την συγχαρώ.
