

Πρόοδος 2025

Διάρκεια 2 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) Υπολογίστε (με απόδειξη) τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{2}x]}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\sqrt{2}x]}{x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} \right).$$

(2) (2 μονάδες) (i) Έστω $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$ για $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, φραγμένη άνω από το 2, το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ υπάρχει, και υπολογίστε το.

(ii) Έστω $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = (x_n + 1)^2$ για $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

(3) (2.5 μονάδες) (i) Δείξτε ότι η ακολουθία $x_n = n - (\log n)^{2025}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι τελικά θετική και τελικά αύξουσα.

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - (\log n)^{2025}}.$$

(4) (3 μονάδες) (i) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & x > 0, \\ e & x \leq 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και ότι η εξίσωση $f(x) = 1.001$ έχει λύση.

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$e^x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

(5) (1.5 μονάδες) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[4]{n^4 + 1}).$$

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ'ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.