ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρόοδος-Χειμερινό Εξάμηνο 2015, Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 2 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (3.5 μονάδες) Έστω $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$.

(**i**) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0,2\pi]$ έχουμε

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(Μπορείτε να πάρετε ως δεδομένο ότι $\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{12}$ και $\hat{f}(n) = \frac{1}{2n^2}$ εάν $n \neq 0$.)

(**ii**) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

(**2**) (3 μονάδες) (**i**) Έστω $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n\, e^{inx}$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P|^2\, dx = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2.$$

(**ii**) Έστω $|a_n| = 1$ για $n = 0, \ldots, N$. Δείξτε ότι

$$\max\Big\{\Big|\sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx)\Big|, x \in [0,2\pi]\Big\} \geq \sqrt{\frac{N}{2} + 1}.$$

(**3**) (4 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική και *Riemann* ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $r \in [0,1)$ και $\theta \in [-\pi,\pi]$ ορίζουμε

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

και

$$(A_r f)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{in\theta}.$$

(**i**) Δείξτε ότι για κάθε $r \in [0,1)$ και $\theta \in [-\pi,\pi]$ έχουμε

$$(A_r f)(\theta) = (f * P_r)(\theta).$$

(**ii**) Δείξτε ότι εάν $r_k \in [0,1)$ και $r_k \to 1$, τότε οι $(P_{r_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι καλοί πυρήνες.
(Δείξτε ότι $P_r(\theta) > 0$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r = 1$, και $\lim_{k\to\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} P_{r_k} = 0$ για κάθε $\delta > 0$.)

(**iii**) Δείξτε ότι εάν $\theta \in [-\pi,\pi]$ είναι σημείο συνέχειας της f, τότε

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{in\theta} = f(\theta).$$
