ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό Διαγώνισμα-Εαρινό Εξάμηνο 2024

Επιτρέπεται μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 2.5 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2.5 μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\hat{f}(n) = \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(**ii**) Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(**iii**) Δείξτε ότι αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $a > \frac{1}{2}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n^a} < +\infty.$$

(**2**) (2.5 μονάδες) Έστω α άρρητος.

(**i**) Δείξτε ότι η ακολουθία $(n^2\alpha + \sqrt{n})$ είναι ισοκατανεμημένη στον $\mathbb{T}$.

(**ii**) Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε τα 4 τελευταία ψηφία του $[n^2\alpha + \sqrt{n}]$ να είναι 2024.

(**3**) (3 μονάδες) (**i**) Εάν $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, δείξτε ότι η συνάρτηση $f * g$ είναι συνεχής και $f * g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(**ii**) Βρείτε όλες τις $f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R})$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f + f * f + f * f * f + f * f * f * f = 0.$$

(**4**) (3 μονάδες) (**i**) Εάν $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R})$, δείξτε ότι $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

(**ii**) Εάν $f \in C^2(\mathbb{R})$ και $f, f' \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, δείξτε ότι $\hat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(**iii**) Έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f, f' \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, και $f(x) \geq \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \geq 2.$$

Ορολογία: $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$, $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx$, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ εάν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα και υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq C/(1+x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f \in C^k(\mathbb{R})$ εάν η f είναι k φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(k)}$ είναι συνεχής.