ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Πρόοδος-Άνοιξη 2011-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια δύο ώρες με κλειστές όλες τις σημειώσεις. Καλή τύχη!!

(**1**) (2 Μονάδες) Είναι οι συναρτήσεις $f(x) = \sin x/x$ και $g(x) = x \log x$ ομοιόμορφα συνεχείς στο $(0, 1)$; Στο $(0, +\infty)$; Απαντήστε και δώστε απόδειξη.

(**2**) (2 Μονάδες) Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 1]$;
(**i**) $f(x) = \cos(1/x)$ εάν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$.
(**ii**) $g(x) = [10\,x]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού x.
(**iii**) $h(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$.
Απαντήστε και δώστε απόδειξη.

(**3**) (2 Μονάδες) Έστω $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
Εάν οι g και h είναι ολοκληρώσιμες σε κάποιο διάστημα $[a, b]$ και
$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b h(x)\, dx,$$
δείξτε ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(**4**) (2 Μονάδες) Έστω $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{Q}, \\ g(x) & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Δείξτε ότι η συνάρτηση h είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα $[a, b]$ αν και μόνο αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(**5**) (3 Μονάδες) (**i**) Αποδείξτε την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$, δείξτε δηλαδή ότι εάν $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε
$$\Big(\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \Big)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2\, dx \cdot \int_a^b (g(x))^2\, dx.$$
Υπόδειξη: $\int_a^b (f(x) + t g(x))^2\, dx \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(**ii**) Έστω $f \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και $\int_0^x (f'(t))^2\, dt \leq 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Δείξτε ότι $f(x) \leq \sqrt{x}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.