Σημειώσεις για το μάθημα Μιγαδική Ανάλυση Ι

Θέμης Μήτσης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο

Στις σημειώσεις αυτές, αν η απόδειξη κάποιου θεωρήματος δεν δίνεται, τότε είτε είναι σχεδόν αυτολεξεί μεταφορά τής απόδειξης αντίστοιχου θεωρήματος σε κάποιο άλλο μάθημα (συνήθως στον Απειροστικό Λογισμό ή στην Ανάλυση), ή ξεφεύγει από το πνεύμα τού μαθήματος. Σε κάθε περίπτωση, η παράλειψη μιας τέτοιας απόδειξης δεν επηρεάζει την κατανόηση τής ύλης.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικά

Στοιχειώδεις αλγεβρικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών

Ένας **μιγαδικός αριθμός** είναι ένας αριθμός τής μορφής $z = x + iy$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και i είναι η **φανταστική μονάδα** $i^2 = -1$. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$. Το x ονομάζεται **πραγματικό μέρος** τού z και συμβολίζεται με $\Re\mathrm{e}\, z$. Το y ονομάζεται **φανταστικό μέρος** τού z και συμβολίζεται με $\Im\mathrm{m}\, z$. Το z μπορούμε να το σκεφτόμαστε σαν το σημείο (x, y) τού επιπέδου, δηλαδή σαν το σημείο που έχει συντεταγμένες το πραγματικό και το φανταστικό μέρος τού z. Έτσι το $\mathbb{C}$ ονομάζεται μερικές φορές **μιγαδικό επίπεδο**. Οι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή όλοι οι μιγαδικοί τής μορφής $x + i0$, αντιστοιχούν στον οριζόντιο άξονα (**πραγματικό άξονα**), ενώ οι φανταστικοί αριθμοί, δηλαδή οι μιγαδικοί τής μορφής $0 + iy$, στον κατακόρυφο άξονα (**φανταστικό άξονα**). Δυο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν τα πραγματικά τους μέρη είναι ίσα και τα φανταστικά τους μέρη είναι ίσα.

$$z = w \iff \Re\mathrm{e}\, z = \Re\mathrm{e}\, w \text{ και } \Im\mathrm{m}\, z = \Im\mathrm{m}\, w.$$

Προσθέτουμε και πολλαπλασιάζουμε μιγαδικούς αριθμούς με τον φυσιολογικό τρόπο.

$$(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b),$$
$$(x + iy)(a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ya).$$

Αν $z = a + ib \neq 0$, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τον αντίστροφο $x + iy$ τού z λύνοντας την εξίσωση $(x + iy)(a + ib) = 1$ ως προς x και y. Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό παίρνουμε $(xa - yb) + i(xb + ya) = 1$. Επομένως πρέπει $xa - yb = 1$ και $xb + ya = 0$. Έτσι έχουμε το 2×2 σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{array} \right\}.$$

Η ορίζουσα τού συστήματος είναι ίση με $a^2 + b^2$, το οποίο δεν είναι μηδέν διότι υποθέσαμε ότι $z \neq 0$. Έτσι παίρνουμε

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Άρα

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = x + iy = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Αν $z = x + iy$, τότε η ποσότητα $\sqrt{x^2 + y^2}$ ονομάζεται **μέτρο** τού z και συμβολίζεται με z. Γεωμετρικά, το $|z|$ είναι η απόσταση τού z από την αρχή των αξόνων. Επίσης, θέτουμε $\bar{z} = x - iy$. Ο $\bar{z}$ ονομάζεται **συζυγής** τού z. Προφανώς $\bar{\bar{z}} = z$ και $|\bar{z}| = |z|$.

Θεώρημα 1.1. *Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Τότε*

(1) $\Re\mathrm{e}\, z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ *και* $\Im\mathrm{m}\, z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.
(2) $|\Re\mathrm{e}\, z| \leq |z|$ *και* $|\Im\mathrm{m}\, z| \leq |z|$.
(3) $|z|^2 = z\bar{z}$.
(4) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

(5) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(6) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(7) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
(8) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Απόδειξη. Έστω ότι $z = x + iy$ και $w = a + ib$.

(1) $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{x+iy+x-iy}{2} = x = \Re\mathrm{e}\, z$. Ομοίως το $\Im\mathrm{m}\, z$.
(2) $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = |\Re\mathrm{e}\, z|$. Ομοίως το φανταστικό μέρος.
(3) $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$.
(4) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
(5) $\overline{z+w} = \overline{(x+a)+i(y+b)} = (x+a) - i(y+b) = x - iy + a - ib = \overline{z} + \overline{w}$.
(6) $\overline{z \cdot w} = \overline{(ax-by)+i(ay+bx)} = (ax-by) - i(ay+bx) = (x-iy)(a-ib) = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(7) $|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$.
(8)

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z} = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\,\Re\mathrm{e}\,(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\left|\Re\mathrm{e}\,(z\overline{w})\right| \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z\overline{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| = (|z| + |w|)^2 .
\end{aligned}$$

□

Πολική μορφή και όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού

Αν φανταστούμε τον μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό $z = x+iy$ σαν το σημείο (x, y) τού επιπέδου, τότε το σημείο αυτό έχει πολικές συντεταγμένες (r, θ), όπου r είναι η απόστασή του από την αρχή των αξόνων και $\theta \in [0, 2\pi)$ η γωνία που κάνει το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το 0 και τέλος το z με τον οριζόντιο άξονα. Με απλή τριγωνομετρία, έχουμε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$. Επίσης, από το πυθαγόρειο θεώρημα,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Έτσι

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.1}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $z \neq 0$ μπορεί να πάρει την παραπάνω μορφή για κάποιο μοναδικό $\theta \in [0, 2\pi)$. Το θ αυτό ονομάζεται **όρισμα** τού z και συμβολίζεται με $\arg z$. Για παράδειγμα $\arg 1 = 0$, $\arg(-2) = \pi$, $\arg i = \pi/2$, $\arg(-i) = 3\pi/2$, $\arg(1 + i) = \pi/4$. Αν $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \quad (\textbf{τύπος τού Euler}).$$

Θα δούμε αργότερα γιατί επιλέξαμε τον συγκεκριμένο συμβολισμό για την ποσότητα $\cos t + i\sin t$ και πώς σχετίζεται με τη συνηθισμένη εκθετική συνάρτηση τού Απειροστικού Λογισμού. Με αυτό το συμβολισμό, η σχέση (1.1) παίρνει τη μορφή

$$z = |z|e^{i\arg z}.$$

Παρατηρήσεις.

- $|e^{it}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$. Δηλαδή το e^{it} είναι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο για κάθε t.
- $\overline{e^{it}} = \left(e^{it}\right)^{-1} = e^{-it}$.
- Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

  $$\sin(s + t) = \sin s\cos t + \sin t\cos s, \quad \cos(s + t) = \cos s\cos t - \sin s\sin t,$$

  παίρνουμε ότι $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

  $$\left(e^{it}\right)^n = \underbrace{e^{it}\cdots e^{it}}_{n \text{ φορές}} = e^{i(t+\cdots+t)} = e^{int},$$

  άρα και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αφού $\left(e^{it}\right)^{-1} = e^{-it}$.
- $e^{it} = 1$ αν και μόνο αν το t είναι ακέραιο πολλαπλάσιο τού 2π. Αυτό προκύπτει άμεσα από το ότι οι εξισώσεις $\cos t = 1$ και $\sin t = 0$ συναληθεύουν για $t = 2k\pi$.

Στο επόμενο θεώρημα βλέπουμε κάποιες εφαρμογές τής τελευταίας παρατήρησης.

Θεώρημα 1.2.

(1) *Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε οι λύσεις τής εξίσωσης $z^n = 1$ είναι $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται* ***n-οστές ρίζες τής μονάδας****.*

(2) *Αν $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε*

$$\arg(zw) = \begin{cases} \arg z + \arg w, & \textit{αν } \arg z + \arg w < 2\pi \\ \arg z + \arg w - 2\pi, & \textit{αν } \arg z + \arg w \geq 2\pi \end{cases}.$$

(3) *Αν $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ και το z δεν είναι θετικός πραγματικός τότε $\arg\overline{z} = 2\pi - \arg z$. Αν το z είναι θετικός πραγματικός τότε προφανώς $\arg z = \arg\overline{z} = 0$.*

Απόδειξη.

(1) Το z δεν είναι 0, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε $z = |z|e^{i\theta}$, όπου θ είναι το όρισμα τού z. Αφού $z^n = 1$, έχουμε ότι $|z|^n = 1$, άρα $|z| = 1$. Έτσι $z = e^{i\theta}$. Επομένως $e^{in\theta} = 1$, συνεπώς οι δυνατές τιμές τού θ είναι όλες εκείνες για τις οποίες το $n\theta$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο τού 2π, δηλαδή $\theta = 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$. Αλλά το θ πρέπει να είναι στο διάστημα $[0, 2\pi)$, άρα $\theta = 2k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

(2) Έχουμε $zw = |zw|e^{i\arg(zw)}$. Επίσης $zw = |z|e^{i\arg z}|w|e^{i\arg w} = |zw|e^{i(\arg z+\arg w)}$. Άρα
$$e^{i\arg(zw)} = e^{i(\arg z+\arg w)}.$$
Επομένως $e^{i(\arg(zw)-\arg z-\arg w)} = 1$. Αυτό σημαίνει ότι $\arg(zw) = \arg z + \arg w + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Αλλά το $\arg(zw)$ είναι ένας αριθμός στο $[0, 2\pi)$, συνεπώς αν το $\arg z + \arg w$ είναι μικρότερο από 2π, η μοναδική επιλογή για το k είναι $k = 0$, ενώ αν το $\arg z + \arg w$ είναι μεγαλύτερο από ή ίσο με 2π, η μοναδική επιλογή για το k είναι $k = -1$.

(3) Έχουμε $z\bar{z} = |z|^2 > 0$, άρα $\arg(z\bar{z}) = 0$. Αλλά από το (2), είτε $\arg(z\bar{z}) = \arg z + \arg \bar{z}$, ή $\arg(z\bar{z}) = \arg z + \arg \bar{z} - 2\pi$. Επομένως, είτε $\arg z + \arg \bar{z} = 0$, ή $\arg z + \arg \bar{z} - 2\pi = 0$. Αφού το z δεν είναι θετικός πραγματικός το $\arg z$ είναι θετικό, επομένως αποκλείεται να ισχύει η πρώτη περίπτωση, άρα πρέπει να ισχύει η δεύτερη, δηλαδή το ζητούμενο.

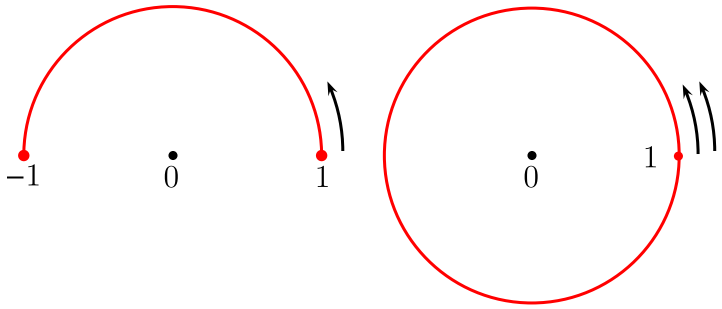
□

Από το (2) τού προηγούμενου θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι αν το z είναι κάποιο μη μηδενικό σημείο, και $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, τότε το $e^{i\theta_0}z$ είναι το σημείο που θα πάρουμε αν περιστρέψουμε αριστερόστροφα το z κατά γωνία θ_0 γύρω από την αρχή των αξόνων.

Κάποια πράγματα από την Αναλυτική Γεωμετρία

Υπενθυμίζουμε τις εξισώσεις μερικών απλών σχημάτων.

- Η παραμετρική εξίσωση τής ευθείας που περνάει από το σημείο z και είναι στην κατεύθυνση που ορίζει το σημείο w είναι $z + tw$, $t \in \mathbb{R}$. Αν το t διατρέχει κάποιο φραγμένο διάστημα και όχι ολόκληρο το $\mathbb{R}$ τότε παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στην ευθεία. Αν το t διατρέχει κάποιο μη φραγμένο διάστημα με το ένα άκρο πεπερασμένο, τότε παίρνουμε μια ημιευθεία.
- Το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο z_1 και τέλος το σημείο z_2 το συμβολίζουμε με $[z_1, z_2]$, Η παραμετρική του εξίσωση είναι $(1-t)z_1 + tz_2$, $t \in [0, 1]$.
- Η εξίσωση τού κύκλου με κέντρο z_0 και ακτίνα r είναι $|z - z_0| = r$. Η παραμετρική εξίσωση είναι $z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Αν το t διατρέχει κάποιο διάστημα μήκους μικρότερου από 2π, τότε παίρνουμε ένα τόξο και όχι ολόκληρο κύκλο. Αν το t διατρέχει κάποιο διάστημα μήκους μεγαλύτερου από 2π τότε παίρνουμε πάλι κύκλο μόνο που τώρα ο κύκλος διαγράφεται περισσότερες από μία φορές. Για παράδειγμα η e^{it}, $t \in [0, \pi]$, παριστάνει ένα ημικύκλιο με κέντρο 0 ακτίνα 1 το οποίο βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Η e^{it}, $t \in [0, 4\pi]$, παριστάνει το μοναδιαίο κύκλο διαγραφόμενο δύο φορές. Η e^{it}, $t \in \mathbb{R}$, παριστάνει το μοναδιαίο κύκλο διαγραφόμενο άπειρες φορές. Σε όλες τις περιπτώσεις οι κύκλοι διαγράφονται αριστερόστροφα.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μιγαδικές Συναρτήσεις

Γενικά

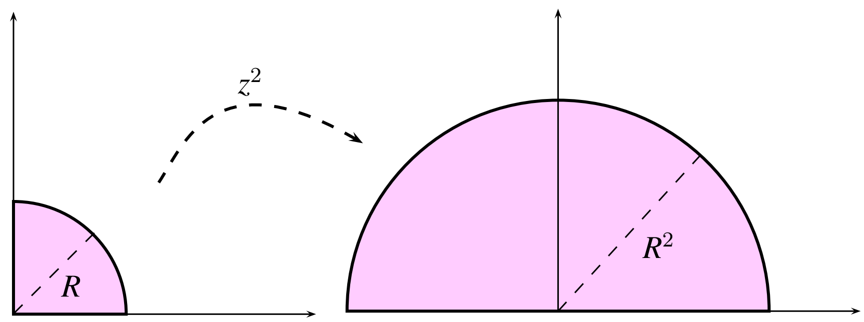
Έστω $A \subset \mathbb{C}$ και $f : A \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Τότε υπάρχουν μοναδικές πραγματικές συναρτήσεις u, v τέτοιες ώστε $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, για κάθε $x + iy \in A$. Οι u, v ονομάζονται **πραγματικό** και **φανταστικό μέρος** τής f, και συμβολίζονται με $\Re\mathfrak{e}\, f$ και $\Im\mathfrak{m}\, f$ αντίστοιχα.

Παραδείγματα.

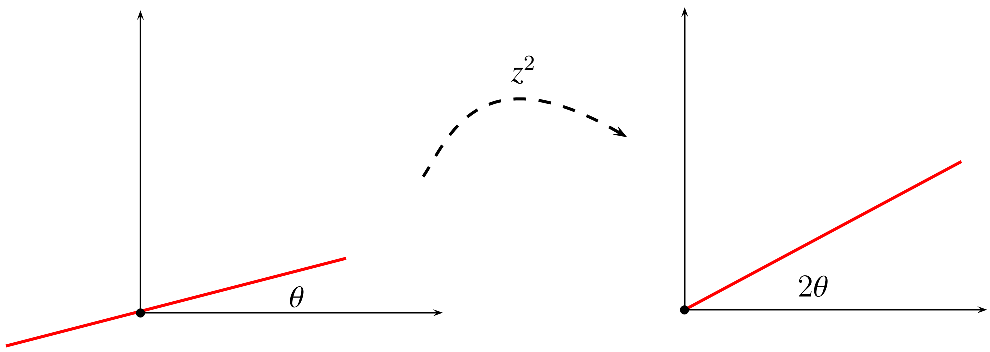
- Αν $f(z) = z^2$, τότε $f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, άρα το πραγματικό μέρος τής f είναι $x^2 - y^2$ και το φανταστικό $2xy$.
- Αν $f(z) = |z|^2$, τότε $f(x+iy) = x^2 + y^2$, άρα το πραγματικό μέρος είναι $x^2 + y^2$ και το φανταστικό 0.

Η f λέγεται **φραγμένη** αν υπάρχει κάποια θετική σταθερά M τέτοια ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in A$. Προφανώς μια συνάρτηση είναι φραγμένη αν και μόνο αν το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι φραγμένες. Αφού το σύνολο των μιγαδικών αριθμών μπορεί να ταυτιστεί με το $\mathbb{R}^2$, μερικές φορές είναι βολικό να σκεφτόμαστε μια μιγαδική συνάρτηση σαν μια συνάρτηση από ένα υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$.
Γενικά δεν μπορούμε να ζωγραφίσουμε τη γραφική παράσταση μιας μιγαδικής συνάρτησης (εκτός κι αν παίρνει μόνο πραγματικές ή μόνο φανταστικές τιμές) γιατί χρειαζόμαστε 4 διαστάσεις. Δύο για το πεδίο ορισμού και δυο για το σύνολο τιμών. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να αντλήσουμε γεωμετρικές πληροφορίες από τον τύπο της.

Παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την $f(z) = z^2$. Η συνάρτηση αυτή παίρνει ένα μιγαδικό αριθμό $z = |z|e^{i\theta}$ και τον στέλνει στον $z^2 = |z|^2 e^{i2\theta}$. Δηλαδή υψώνει στο τετράγωνο το μέτρο και διπλασιάζει το όρισμα. Έτσι μπορούμε να δούμε πώς μετασχηματίζει η f ένα δεδομένο σχήμα. Ας πούμε, ένα τεταρτοκύκλιο με κέντρο 0 και ακτίνα R απεικονίζεται σε ένα ημικύκλιο κέντρου 0 και ακτίνας R^2.



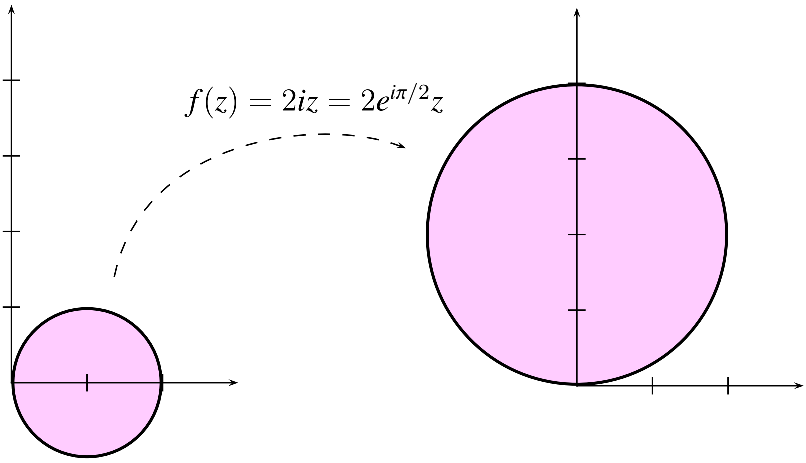
Μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων και κάνει γωνία θ με τον πραγματικό άξονα, δηλαδή το σύνολο $\{te^{i\theta} : t \in \mathbb{R}\}$ μετασχηματίζεται στο σύνολο $\{t^2 e^{i2\theta} : t \in \mathbb{R}\} = \{te^{i2\theta} : t \geq 0\}$, δηλαδή σε μια ημιευθεία που ξεκινάει από το 0 και κάνει γωνία 2θ με τον πραγματικό άξονα.



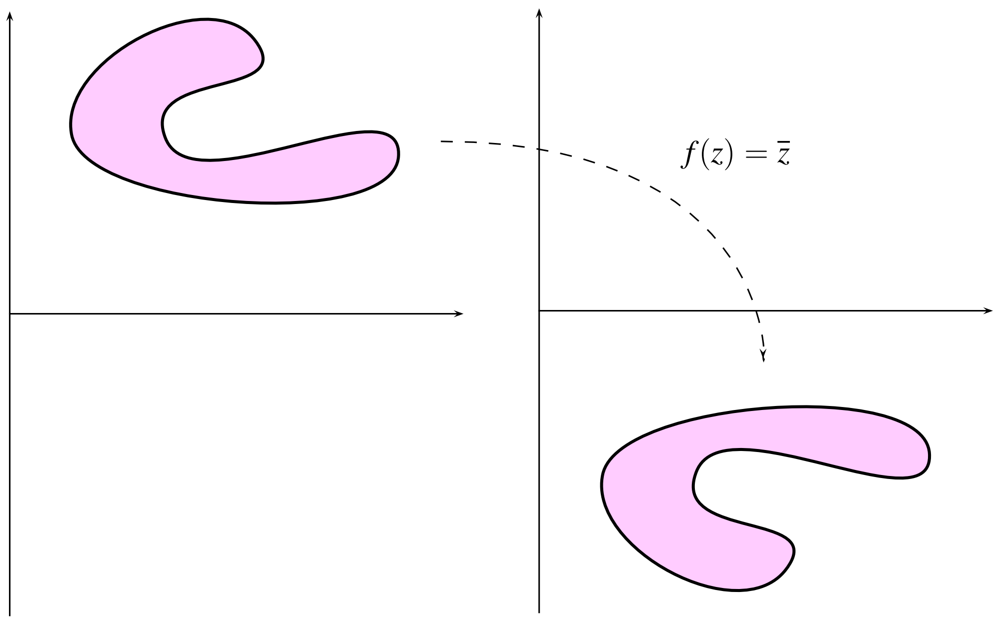
Τελείως ανάλογες ιδιότητες έχει η συνάρτηση z^n, όπου n φυσικός αριθμός. Περισσότερες συναρτήσεις θα μελετήσουμε στα παραδείγματα παρακάτω.

Πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, συζυγής και μέτρο σαν συναρτήσεις

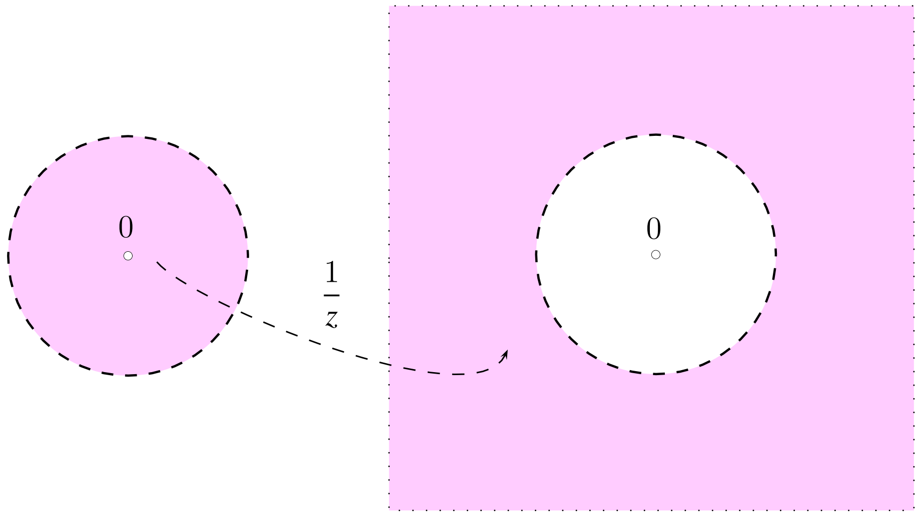
- Η πιο απλή μιγαδική συνάρτηση είναι η $f(z) = z + z_0$, όπου z_0 σταθερό. Όπως είπαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τους μιγαδικούς αριθμούς μπορούμε να τους ταυτίσουμε με τα σημεία τού επιπέδου. Έτσι η f προσθέτει στο σημείο z το σημείο z_0, δηλαδή το μετατοπίζει κατά z_0. Γι΄ αυτό η f λέγεται **μετάθεση**.
- Αν $z_0 = re^{i\theta}$, όπου $r > 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f(z) = z_0 z$, στρέφει το σημείο z κατά γωνία θ γύρω από το 0 και στη συνέχεια πολλαπλασιάζει το μέτρο του με r. Δηλαδή η f είναι συνδυασμός μιας **στροφής** και μιας **διαστολής** (αν $r > 1$) ή μιας **συστολής** (αν $r < 1$). Στο σχήμα παρακάτω, η συνάρτηση $2iz$ παίρνει το δίσκο με κέντρο 1 και ακτίνα 1 τον στρέφει κατά 90 μοίρες και μετά τον μεγενθύνει 2 φορές.



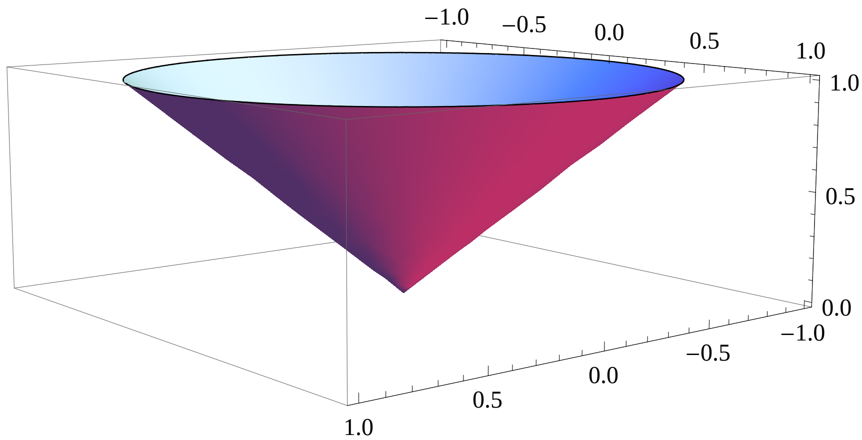
- Η συνάρτηση $f(z) = \bar{z}$ απεικονίζει το σημείο $x + iy$ στο $x - iy$, δηλαδή στο συμμετρικό του ως προς την πραγματική ευθεία. Επομένως η f είναι **ανάκλαση** στον οριζόντιο άξονα.



Χρησιμοποιώντας την $\bar{z}$ μπορούμε να μελετήσουμε την $1/z$ αφού $1/z = \bar{z}/|z|^2$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η $1/z$ είναι ανάκλαση στον πραγματικό άξονα και στη συνέχεια μεγένθυνση ή σμίκρυνση $1/|z|^2$ φορές. Ιδιαίτερα η $1/z$ απεικονίζει το εσωτερικό τού μοναδιαίου δίσκου (εκτός από το 0) στο εξωτερικό του και αντίστροφα.



- Τέλος, η συνάρτηση $f(z) = |z|$ είναι σταθερή πάνω σε κάθε κύκλο με κέντρο το 0 γιατί η εξίσωση ενός τέτοιου κύκλου είναι $|z| = c$. Η f παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, επομένως μπορούμε να ζωγραφίσουμε τη γραφική της παράσταση.



Το όρισμα σαν συνάρτηση

Το όρισμα ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση από το $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Από τον ορισμό τού arg έχουμε ότι

$$x + iy = |x + iy|e^{i\arg(x+iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\arg(x + iy) + i\sin\arg(x + iy)).$$

Επομένως

$$\cos\arg(x + iy) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{2.1}$$

Τώρα, αν $0 \le \theta \le \pi$ τότε η λύση τής εξίσωσης $\cos\theta = t$ είναι $\theta = \arccos t$. Έτσι για $y \ge 0$ έχουμε ότι

$$0 \le \arg(x + iy) \le \pi,$$

άρα η εξίσωση (2.1) δίνει

$$\arg(x + iy) = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Για $y < 0$ έχουμε $\pi < \arg(x + iy) < 2\pi$, άρα $0 < 2\pi - \arg(x + iy) < \pi$. Αλλά από την (2.1)

$$\cos(2\pi - \arg(x + iy)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

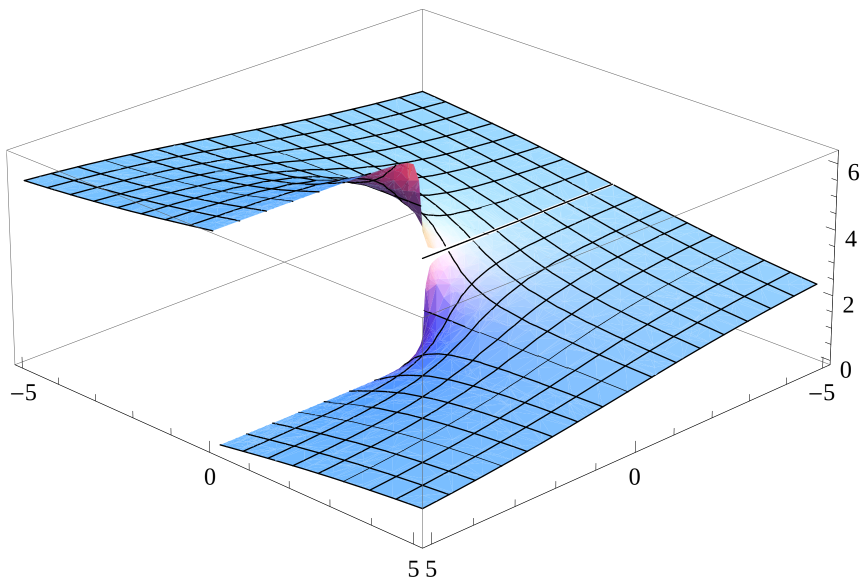
Επομένως

$$\arg(x + iy) = 2\pi - \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Συνεπώς ο τύπος για το arg είναι

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{αν } y \ge 0 \\[2ex] 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{αν } y < 0 \end{cases}$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το arg παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, άρα μπορούμε να ζωγραφίσουμε την γραφική του παράσταση.



Παρατηρήστε το "σκίσιμο" που αντιστοιχεί στην ημιευθεία $(0, +\infty)$. Θα δούμε παρακάτω ότι σαν συνάρτηση, το όρισμα είναι ασυνεχές ακριβώς πάνω στούς θετικούς πραγματικούς.

Η μιγαδική n-οστή ρίζα

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$. Θα λύσουμε την εξίσωση $w^n = z$, όπου n φυσικός. Γράφουμε $z = |z|e^{i\theta}$, όπου $\theta = \arg z$. Τότε

$$\left(\frac{w}{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1.$$

Επομένως από το θεώρημα 1.2 έχουμε

$$\frac{w}{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

άρα

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Αυτές είναι όλες οι n-οστές ρίζες τού z.

Παραδείγματα.

- Αν $z = 4$ τότε $\arg 4 = 0$, άρα οι δεύτερες ρίζες τού 4 είναι $\sqrt{4}e^0 = 2$ και $\sqrt{4}e^{i\pi} = -2$.
- Αν $z = -1$ τότε $\arg(-1) = \pi$, άρα οι δεύτερες ρίζες τού -1 είναι $\sqrt{1}e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ και $\sqrt{1}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

Τώρα, για να ορίσουμε τη **συνάρτηση** n-οστή ρίζα διαλέγουμε **μια** από τις n-οστές ρίζες, ας πούμε αυτή που αντιστοιχεί στο $k = 0$, και θέτουμε

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z}{n}}.$$

Φυσικά οποιαδήποτε άλλη επιλογή τού k θα μας έδινε μια εξίσου "νόμιμη" συνάρτηση, κάνουμε όμως την παραπάνω σύμβαση, ώστε όταν λέμε "n-οστή ρίζα" να μην έχουμε αμφιβολία τι εννοούμε (δηλαδή ποια απ' όλες τις n-οστές ρίζες), ακριβώς όπως στη στοιχειώδη άλγεβρα όταν λέμε "τετραγωνική ρίζα τού 5" εννοούμε $\sqrt{5}$ και όχι $-\sqrt{5}$.

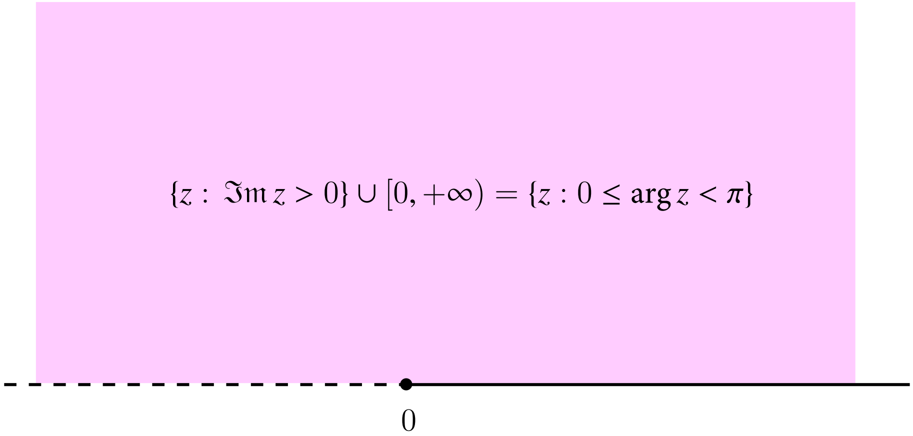
Παραδείγματα.

- Οι δεύτερες ρίζες τού -1 είναι i και $-i$, άρα $\sqrt{-1} = i$.
- $\arg i = \frac{\pi}{2}$, άρα οι τρίτες ρίζες τού i είναι $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ και $e^{i\frac{9\pi}{6}} = -i$. Επομένως $\sqrt[3]{i} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τη n-οστή ρίζα μπορούμε να ορίσουμε την ρητή δύναμη z^q, όπου $z \neq 0$ και $q \in \mathbb{Q}$ ως εξής. Αν $q = m/n$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε θέτουμε

$$z^q = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m.$$

Προσέξτε ότι αν το q είναι **ακέραιος** τότε προφανώς $(zw)^q = z^q w^q$. Αν το q δεν είναι ακέραιος τότε η ιδιότητα αυτή γενικά δεν ισχύει, εκτός κι' αν τα z και w είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Για παράδειγμα $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$, αλλά $\sqrt{(-1)(-1)} = 1$.
Η δράση τής $\sqrt[n]{z}$ σε κάποιο σημείο z είναι η αντίστροφη τής δράσης τής z^n. Δηλαδή διαιρεί το όρισμα με n και υψώνει το μέτρο στην $1/n$. Έτσι, για παράδειγμα, η $\sqrt{z}$ απεικονίζει ολόκληρο το $\mathbb{C}$ (ορίσματα στο διάστημα $[0, 2\pi)$) στο σύνολο $\{z : \Im z > 0\} \cup [0, +\infty)$ (ορίσματα στο διάστημα $[0, \pi)$).

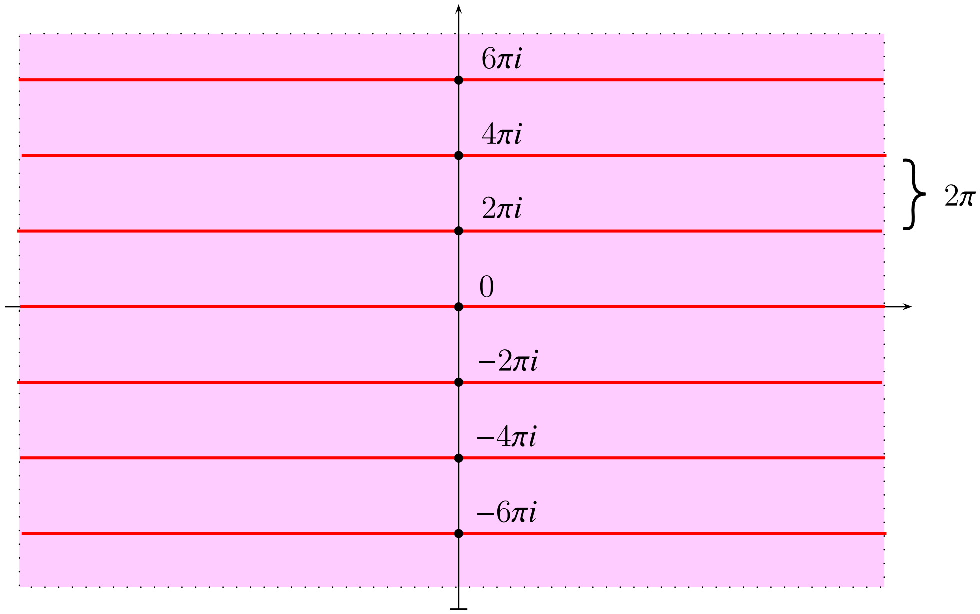

$\{z : \Im\mathfrak{m}\, z > 0\} \cup [0, +\infty) = \{z : 0 \leq \arg z < \pi\}$
0

Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση

Αν $t \in \mathbb{R}$ τότε ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το e^{it} να είναι $\cos t + i \sin t$. Αν τώρα $z = x + iy$ ορίζουμε γενικότερα την **μιγαδική εκθετική συνάρτηση**

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Αν $z \in \mathbb{R}$ (οπότε $y = 0$), τότε η συνάρτηση αυτή συμφωνεί με τη συνηθισμένη εκθετική συνάρτηση τού Απειροστικού Λογισμού. Εύκολα βλέπουμε ότι $e^{z+w} = e^z e^w$ για κάθε z, w. Σε αντίθεση με την πραγματική εκθετική συνάρτηση, η μιγαδική εκθετική είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$ διότι $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$. Έτσι η e^z επαναλαμβάνεται σε όλες "κάτω κλειστές-άνω ανοιχτές" οριζόντιες λωρίδες πλάτους 2π τού παρακάτω σχήματος.



Η εκθετική συνάρτηση είναι 1-1 σε κάθε μια από αυτές τις λωρίδες, δηλαδή σε κάθε σύνολο τής μορφής

$$\{z : 2k\pi \leq \Im\mathrm{m}\, z < 2(k+1)\pi\}, \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}.$$

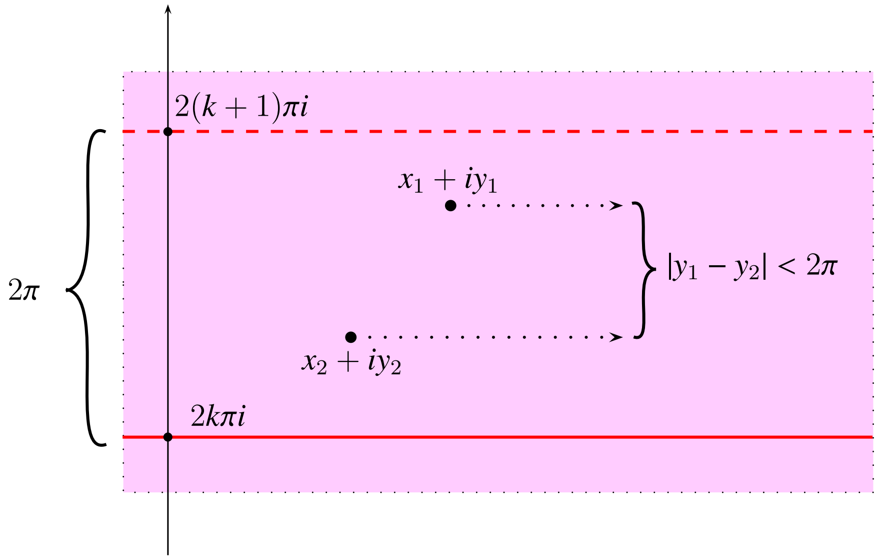
Πράγματι, αν $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι δυο σημεία σε μια τέτοια λωρίδα, έτσι ώστε $e^{z_1} = e^{z_2}$ τότε

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow |e^{z_1}| = |e^{z_2}| \Rightarrow \left|e^{x_1} e^{iy_1}\right| = \left|e^{x_2} e^{iy_2}\right| \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

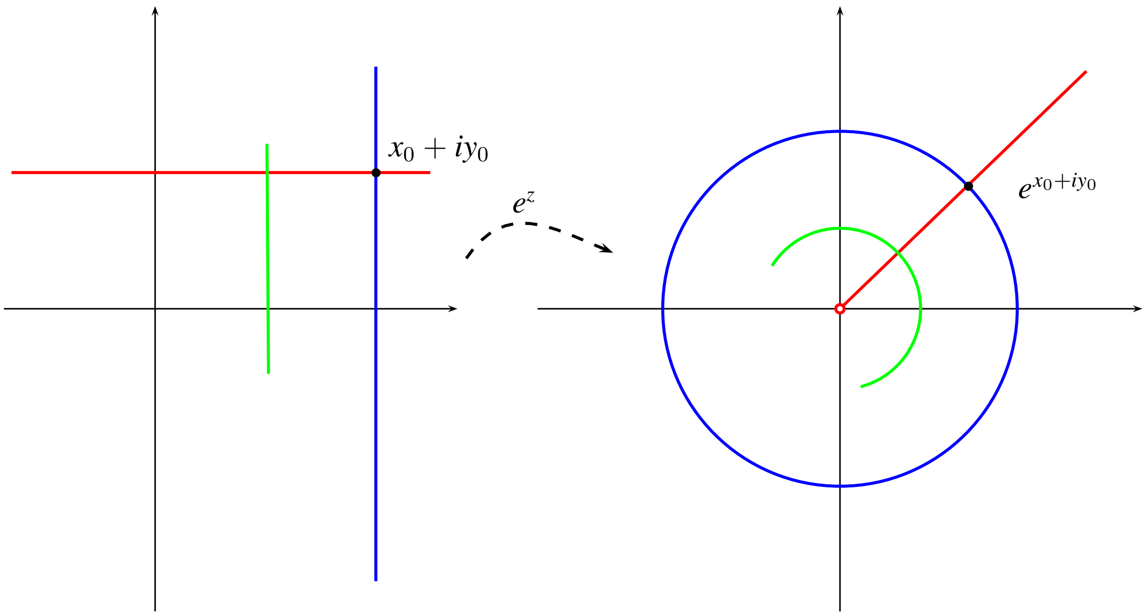
Αφού $x_1 = x_2$, η σχέση $e^{z_1} = e^{z_2}$ δίνει $e^{iy_1} = e^{iy_2}$, άρα το $y_1 - y_2$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο τού 2π. Αλλά τα z_1 και z_2 ανήκουν στην λωρίδα, άρα $|y_1 - y_2| < 2\pi$. Δηλαδή η διαφορά $y_1 - y_2$ είναι ταυτόχρονα ακέραιο πολλαπλάσιο τού 2π και σε απόλυτη τιμή γνήσια μικρότερη από 2π. Η μοναδική περίπτωση να ισχύει κάτι τέτοιο είναι όταν $y_1 = y_2$. Συμπεραίνουμε τελικά ότι $z_1 = z_2$, συνεπώς η e^z είναι 1-1 στην λωρίδα. Επίσης παρατηρούμε ότι η e^z είναι επί τού $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, γιατί αν $w \neq 0$ και θέσουμε $z = \ln|w| + i \arg w$, τότε

$$e^z = e^{\ln|w| + i \arg w} = e^{\ln|w|} e^{i \arg w} = |w| e^{i \arg w} = w,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ορισμό τού arg.



Η εκθετική συνάρτηση απεικονίζει μια ευθεία παράλληλη στον πραγματικό άξονα, δηλαδή ένα σύνολο τής μορφής $\{t + iy_0 : t \in \mathbb{R}\}$ ($y_0 \in \mathbb{R}$ σταθερό) στο σύνολο $\{e^t e^{iy_0} : t \in \mathbb{R}\} = \{xe^{iy_0} : x > 0\}$ το οποίο είναι μια ημιευθεία, που ξεκινάει από το μηδέν (χωρίς το μηδέν) και περνάει από το σημείο e^{iy_0}. Επίσης απεικονίζει μια ευθεία παράλληλη στον φανταστικό άξονα, δηλαδή ένα σύνολο τής μορφής $\{x_0 + it : t \in \mathbb{R}\}$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ σταθερό) στο σύνολο $\{e^{x_0} e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ το οποίο είναι κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα e^{x_0}. Παρατηρήστε ότι αφού το t διατρέχει ολόκληρο το $\mathbb{R}$, ο κύκλος διαγράφεται άπειρες φορές. Γενικότερα, οποιοδήποτε κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα $\{x + it : t \in [a, b]\}$ μετασχηματίζεται στο τόξο $\{e^x e^{it} : t \in [a, b]\}$. Η γωνία στην οποία αντιστοιχεί το τόξο είναι ίση με το μήκος τού ευθύγραμμου τμήματος. Αν το μήκος αυτό είναι μεγαλύτερο από 2π τότε το ευθύγραμμο τμήμα απεικονίζεται σε κύκλο που διάγραφεται τουλάχιστο μια φορά.



Τέλος παρατηρούμε ότι $e^z = 1$ αν και μόνο αν το z είναι ακέραιο πολλαπλάσιο τού $2\pi i$. Πράγματι, αν $z = 2k\pi i$ τότε προφανώς $e^z = 1$. Αντίστροφα, αν $e^{x+iy} = 1$, τότε παίρνοντας μέτρα έχουμε ότι $e^x = 1$, άρα $x = 0$. Συνεπώς η $e^{x+iy} = 1$ δίνει $e^{iy} = 1$, επομένως $y = 2k\pi$.

Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αν $z \in \mathbb{C}$ τότε ορίζουμε τις **μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις**

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Αν το z είναι πραγματικός αριθμός τότε από τον τύπο τού Euler βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές συμφωνούν με τις συνηθισμένες τριγωνομετρικές συναρτήσεις τού Απειροστικού Λογισμού.

Θεώρημα 2.1.

(1) *Οι* $\sin$ *και* $\cos$ *είναι περιοδικές με περίοδο* 2π.

(2) $\sin z = 0$ *αν και μόνο αν* $z = k\pi$, *όπου* $k \in \mathbb{Z}$. $\cos z = 0$ *αν και μόνο αν* $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, *όπου* $k \in \mathbb{Z}$.

(3) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Απόδειξη.

(1) $\sin(z + 2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \dfrac{e^{iz}e^{2\pi i} - e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2i} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$. Ομοίως $\cos(z + 2\pi) = \cos z$.

(2) Αν $\sin z = 0$ τότε $e^{iz} = e^{-iz}$, άρα $e^{2iz} = 1$, επομένως $2iz = 2k\pi i$, συνεπώς $z = k\pi$. Ομοίως λύνουμε την $\cos z = 0$.

(3) $\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \dfrac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.$

□

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και κάνοντας απλές αλγεβρικές πράξεις μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι $\sin z$ και $\cos z$ ικανοποιούν όλες τις οικείες τριγωνομετρικές ταυτότητες. Για παράδειγμα

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z, \quad \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

Προσέξτε όμως ότι υπάρχουν κάποιες αξιοσημείωτες διαφορές. Η πιο σημαντική είναι ότι οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι επί τού $\mathbb{C}$. Ας δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $z \in \mathbb{C}$ η εξίσωση $\cos w = z$ έχει πάντα λύση. Έχουμε

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z,$$

έτσι, θέτοντας $u = e^{iw}$ παίρνουμε $u + \frac{1}{u} = 2z$. Άρα $u^2 - 2uz + 1 = 0$. Μια λύση αυτής τής εξίσωσης είναι $u = z + \sqrt{z^2 + 1}$. Η ποσότητα αυτή δεν είναι ποτέ μηδέν και γνωρίζουμε ότι η εκθετική συνάρτηση είναι επί τού $C \setminus \{0\}$, άρα η εξίσωση

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 + 1}$$

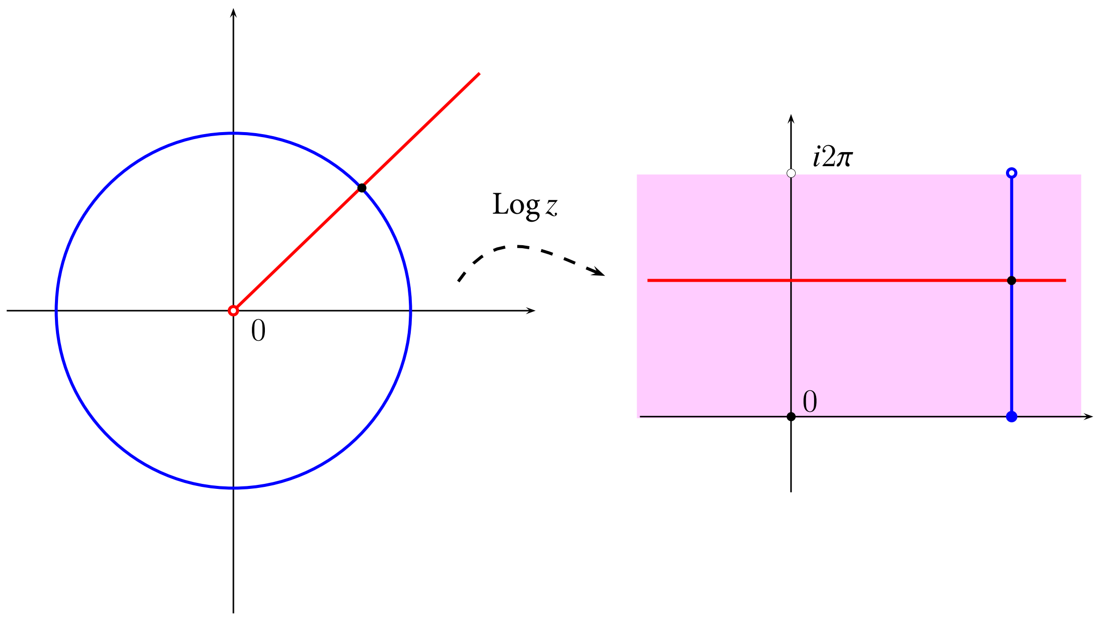
έχει λύση ως προς w, το οποίο σημαίνει ότι $\cos w = z$. Ομοίως δείχνουμε ότι η $\sin z$ είναι επί τού $\mathbb{C}$. Άμεσο πόρισμα είναι ότι οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις (σε αντίθεση με τις πραγματικές) **δεν είναι φραγμένες**.

Ο μιγαδικός λογάριθμος

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε τη λωρίδα $S_k = \{z : 2k\pi \le \Im\mathrm{m}\, z < 2(k+1)\pi\}$. Όπως έχουμε δει σε κάθε τέτοια λωρίδα η εκθετική συνάρτηση είναι 1-1 και επί τού $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Η αντίστροφή της είναι μια συνάρτηση από το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ στο S_k και συμβολίζεται με $\log_{(k)}$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της, παίρνουμε $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και θέτουμε $z = \ln|w| + i(2k\pi + \arg w)$. Τότε $z \in S_k$ και $e^z = w$. Αφού η αντίστροφη είναι μοναδική, έχουμε ότι

$$\log_{(k)}(w) = \ln|w| + i(2k\pi + \arg w).$$

Η $\log_{(0)}$ ονομάζεται **κύριος κλάδος τού λογαρίθμου** και συμβολίζεται με Log. Όλες οι $\log_{(k)}$ μπορούν να θεωρηθούν "λογάριθμοι" αφού $e^{\log_{(k)}(w)} = w$ για κάθε $w \neq 0$. Προκύπτουν από τον κύριο λογάριθμο αν του προσθέσουμε $2k\pi i$. Παρατηρήστε ότι αν το w είναι θετικός πραγματικός τότε $\operatorname{Log} w = \ln w$, δηλαδή ο κύριος λογάριθμος επεκτείνει τον συνηθισμένο φυσικό λογάριθμο τού Απειροστικού Λογισμού. Αφού ο Log αντιστρέφει την εκθετική, στέλνει ημιευθείες με αρχή το μηδέν (χωρίς το μηδέν) σε οριζόντιες ευθείες και κύκλους με κέντρο το μηδέν σε κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα μήκους 2π.



Προσέξτε ότι, γενικά, η ισότητα $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$ δεν ισχύει. Για παράδειγμα

$$\operatorname{Log}((-1)(-1)) = \operatorname{Log} 1 = 0,$$

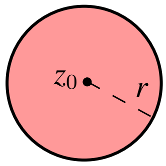
αλλά $\operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log}(-1) = 2i\arg(-1) = 2\pi i$. Χρησιμοποιώντας τον λογάριθμο μπορούμε να ορίσουμε την **αυθαίρετη μιγαδική δύναμη**. Αν $z \neq 0$ και a είναι αυθαίρετος μιγαδικός αριθμός, τότε θέτουμε $z^a = e^{a \operatorname{Log} z}$. Παρατηρήστε ότι αν το a είναι ρητός αριθμός, τότε ο προηγούμενος ορισμός συμφωνεί με τον ορισμό τής ρητής δύναμης που δώσαμε σε προηγούμενη ενότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

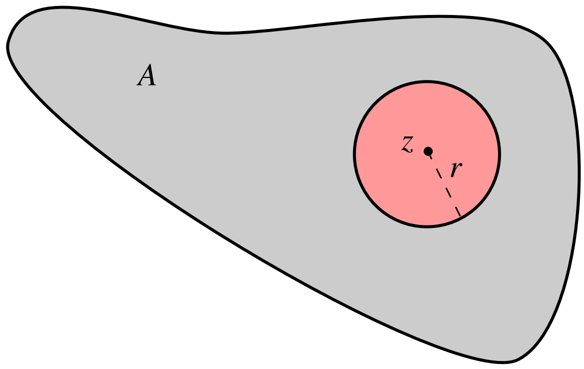
Στοιχειώδης τοπολογία στο μιγαδικό επίπεδο

Ανοιχτά και κλειστά σύνολα

Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $r > 0$, τότε θέτουμε $D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$.

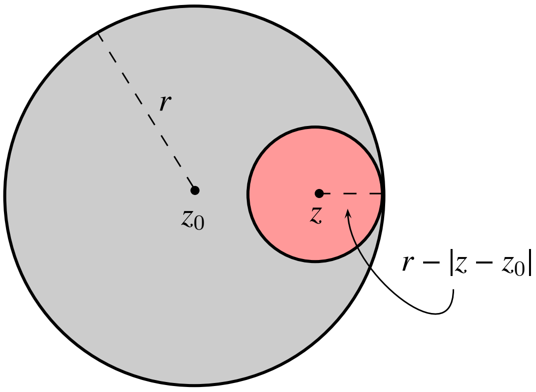


Το σύνολο αυτό ονομάζεται **ανοιχτός δίσκος** με κέντρο z_0 και ακτίνα r. Ονομάζεται επίσης **περιοχή** τού σημείου z_0. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ λέγεται **ανοιχτό** αν για κάθε $z \in A$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D(z, r) \subset A$. Δηλαδή αν κάθε σημείο τού A έχει περιοχή η οποία περιέχεται στο A.



Παραδείγματα.

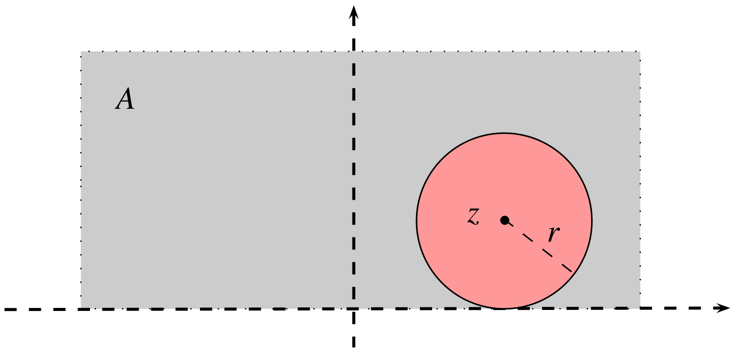
- Κάθε ανοιχτός δίσκος $D(z_0, r)$ είναι ανοιχτό σύνολο διότι για το τυχόν $z \in D(z_0, r)$ έχουμε
$$D(z, r - |z - z_0|) \subset D(z_0, r).$$
Πράγματι, αν $w \in D(z, r-|z-z_0|)$, τότε $|w-z_0| \leq |w-z|+|z-z_0| < r-|z-z_0|+|z-z_0| = r$, άρα $w \in D(z_0, r)$.



- Το σύνολο $A = \{z : \Re z > 0\}$ (το **ανοιχτό άνω ημιεπίπεδο**) είναι ανοιχτό γιατί αν $z \in A$ και θέσουμε $r = \Re z$ τότε ο δίσκος $D(z, r)$ περιέχεται στο A. Αυτό ισχύει διότι για $w \in D(z, r)$ έχουμε

$$\Re w = \Re (w - z + z) = \Re (w - z) + \Re z = \Re (w - z) + r \geq -|w - z| + r > -r + r = 0,$$

άρα $w \in A$.



Παρατήρηση. Η ένωση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.

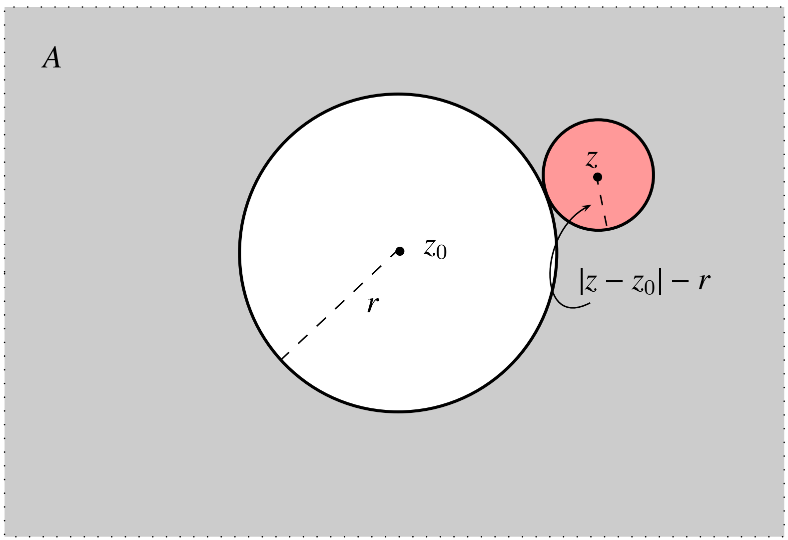
Τώρα, ένα σύνολο λέγεται **κλειστό** αν το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό.

Παραδείγματα.

- Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ τότε θέτουμε $\overline{D}(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leq r\}$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται **κλειστός δίσκος** με κέντρο z_0 και ακτίνα r. Είναι κλειστό διότι το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο

$$A = \{z : |z - z_0| > r\},$$

είναι ανοιχτό. Πράγματι αν $z \in A$ τότε $D(z, |z - z_0| - r) \subset A$.



- Ο **κύκλος** με κέντρο z_0 και ακτίνα $r > 0$, δηλαδή το σύνολο $\{z : |z - z_0| = r\}$, συμβολίζεται με $C(z_0, r)$. Ο κύκλος είναι κλειστό σύνολο γιατί το συμπλήρωμά του είναι

$$\mathbb{C} \setminus C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\} \cup \{z : |z - z_0| > r\},$$

το οποίο είναι ανοιχτό σαν ένωση δυο ανοιχτών συνόλων.

- Το σύνολο $\{z : \Re z \geq 0\}$ (το **κλειστό άνω ημιεπίπεδο**) είναι κλειστό γιατί το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\{z : \Re z < 0\}$ είναι ανοιχτό.

- Κάθε μονοσύνολο $\{z_0\}$ είναι κλειστό γιατί αν πάρουμε ένα σημείο στο συμπλήρωμα τού $\{z_0\}$, δηλαδή ένα $z \neq z_0$, τότε ο δίσκος $D(z, |z - z_0|)$ δεν περιέχει το z_0, άρα είναι υποσύνολο τού συμπληρώματος. Αυτό σημαίνει ότι το συμπλήρωμα είναι ανοιχτό, άρα το μονοσύνολο είναι κλειστό.
- Κάθε ευθεία είναι κλειστό σύνολο διότι αν πάρουμε ένα σημείο εκτός τής ευθείας, τότε ο ανοιχτός δίσκος με κέντρο το σημείο και ακτίνα την απόσταση τού σημείου από την ευθεία δεν τέμνει την ευθεία, δηλαδή περιέχεται στο συμπλήρωμά της. Έτσι το συμπλήρωμα τής ευθείας είναι ανοιχτό, άρα η ευθεία είναι κλειστό σύνολο.

Παρατηρήσεις.

- Η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο και η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.
- Προσέξτε ότι αν ένα σύνολο δεν είναι ανοιχτό δεν μπορούμε γενικά να συμπεράνουμε ότι είναι κλειστό. Ούτε αντιστρόφως. Για παράδειγμα αν πάρετε ένα κλειστό δίσκο και αφαιρέσετε από την περιφέρειά του ένα τόξο, το σύνολο που προκύπτει δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.
- Κάνουμε τη σύμβαση ότι το $\emptyset$ και το $\mathbb{C}$ είναι ανοιχτά και κλειστά. Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν άλλα σύνολα με αυτή την ιδιότητα.

Ένα σημείο z λέγεται **συνοριακό σημείο** ενός συνόλου A αν κάθε περιοχή τού z τέμνει και το A και το συμπλήρωμα τού A. Το σύνολο των συνοριακών σημείων τού A λέγεται **σύνορο** τού A.

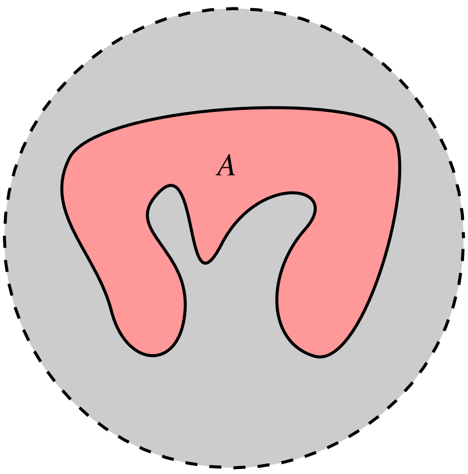
Παραδείγματα.

- Το σύνορο ενός ανοιχτού ή ενός κλειστού δίσκου είναι η περιφέρειά του.
- Το σύνορο τού ανοιχτού ή τού κλειστού άνω ημιεπιπέδου είναι ο πραγματικός άξονας.
- Το σύνορο ενός κύκλου είναι ο ίδιος ο κύκλος.
- Το σύνορο μιας ευθείας είναι η ίδια η ευθεία.

Παρατηρήσεις.

- Το σύνορο ενός συνόλου είναι πάντα κλειστό.
- Αν το A είναι κλειστό, τότε το σύνορό του περιέχεται στο A.
- Αν το A είναι ανοιχτό, τότε το σύνορό του είναι ξένο με το A.
- Κάθε σύνολο μαζί με το σύνορό του δημιουργούν ένα κλειστό σύνολο.

Ένα σύνολο λέγεται **φραγμένο**, αν το $\{|z| : z \in A\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Δηλαδή αν υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $|z| \leq R$ για κάθε $z \in A$. Ισοδύναμα, το A είναι φραγμένο αν περιέχεται σε κάποιο δίσκο.



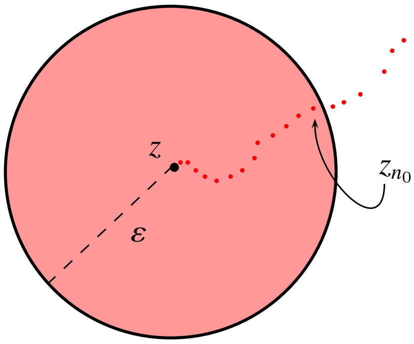
Τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα τού $\mathbb{C}$ ονομάζονται **συμπαγή**.

Ακολουθίες μιγαδικών αριθμών

Μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών είναι μια ακολουθία τής μορφής $z_n = x_n + iy_n$, όπου x_n, y_n δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η z_n **συγκλίνει** στο z αν $|z_n - z| \to 0$ (σαν ακολουθία πραγματικών αριθμών). Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$z_n \to z, \quad \text{ή } \lim z_n = z, \quad \text{ή } \lim_{n\to+\infty} z_n = z.$$

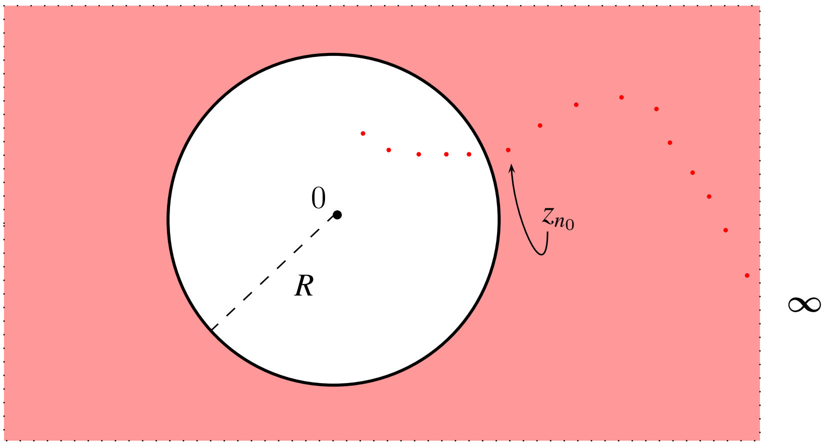
Επομένως $z_n \to z$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|z_n - z| < \varepsilon$. Ισοδύναμα, για κάθε περιοχή τού z, από κάποιο δείκτη και μετά όλοι οι όροι τής ακολουθίας βρίσκονται μέσα στην περιοχή.



Αν $|z_n| \to +\infty$ τότε λέμε ότι η z_n **τείνει στο μιγαδικό άπειρο** και γράφουμε

$$z_n \to \infty, \quad \text{ή } \lim z_n = \infty, \quad \text{ή } \lim_{n\to+\infty} z_n = \infty.$$

Δηλαδή $z_n \to \infty$ αν και μόνο αν για κάθε $R > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|z_n| > R$. Ισοδύναμα, για κάθε δίσκο, από κάποιο δείκτη και μετά όλοι οι όροι τής ακολουθίας είναι έξω από το δίσκο.



Το σύμβολο για το μιγαδικό άπειρο είναι ∞ χωρίς $\pm$. Φανταζόμαστε το ∞ σαν ένα "σημείο" σε άπειρη απόσταση από κάθε μιγαδικό αριθμό. Όταν λέμε **περιοχή τού απείρου** εννοούμε ένα σύνολο τής μορφής $\{z : |z| > R\}$, δηλαδή το συμπλήρωμα ενός δίσκου.

Θεώρημα 3.1. *Έστω $z_n = x_n + iy_n$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $z = x + iy$ ένα σημείο. Τότε $z_n \to z$ αν και μόνο αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Δηλαδή η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο μιγαδικό αριθμό αν και μόνο αν το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος συγκλίνουν στο πραγματικό και το φανταστικό μέρος τού αριθμού αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Έστω ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Τότε

$$|z_n - z| = |x_n - x + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \to 0.$$

Άρα $z_n \to z$. Αντίστροφα, αν $z_n \to z$ τότε

$$|x_n - x| = |\Re\mathrm{e}\,(z_n - z)| \leq |z_n - z| \to 0, \quad |y_n - y| = |\Im\mathrm{m}\,(z_n - z)| \leq |z_n - z| \to 0.$$

Επομένως $x_n \to x$ και $y_n \to y$. □

Θεώρημα 3.2. *Αν η z_n συγκλίνει τότε είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $z_n \to z$. Από το θεώρημα 3.1, $\Re\mathrm{e}\, z_n \to \Re\mathrm{e}\, z$ και $\Im\mathrm{m}\, z_n \to \Im\mathrm{m}\, z$, άρα οι ακολουθίες $\Re\mathrm{e}\, z_n$ και $\Im\mathrm{m}\, z_n$ είναι φραγμένες. Αλλά $|z_n| \leq |\Re\mathrm{e}\, z_n| + |\Im\mathrm{m}\, z_n|$, επομένως η z_n είναι φραγμένη. □

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.1 μπορούμε άμεσα να αποδείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.3. *Έστω ότι $z_n \to z$ και $w_n \to w$, με $z, w \in \mathbb{C}$. Τότε:*

(1) $|z_n| \to |z|$.
(2) $\overline{z}_n \to \overline{z}$.
(3) $z_n + w_n \to z + w$.
(4) $z_n w_n \to zw$.
(5) *Αν επιπλέον $z \neq 0$, τότε $z_n^{-1} \to z^{-1}$. Παρατηρήστε ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει σε μη μηδενικό αριθμό, τότε από κάποιο δείκτη και μετά οι όροι της είναι κατ' ανάγκη μη μηδενικοί, επομένως έχει νόημα να γράψουμε z_n^{-1} από αυτό τον δείκτη και μετά.*

Παραδείγματα.

- $(1 + \frac{1}{n}) + i(1 - \frac{1}{n}) \to 1 + i$.
- $n + \frac{i}{n} \to \infty$.
- $-n \to \infty$.
- $(-1)^n n \to \infty$. Προσέξτε ότι η ακολουθία αυτή, με την έννοια τού Απειροστικού Λογισμού, δεν τείνει ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$.

Επιτρέπονται οι παρακάτω "αλγεβρικές πράξεις" που εμπλέκουν το μιγαδικό άπειρο.

Θεώρημα 3.4.

(1) *Αν $z_n \to \infty$ και η w_n είναι φραγμένη τότε $z_n + w_n \to \infty$*
(2) *Αν $z_n \to \infty$ και η w_n συγκλίνει σε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό ή τείνει στο άπειρο, τότε $z_n w_n \to \infty$.*
(3) *Μια ακολουθία μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z_n συγκλίνει στο 0 αν και μόνο αν η z_n^{-1} τείνει στο άπειρο.*

Απόδειξη.

(1) Αφού η w_n είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|w_n| \leq M$ για κάθε n. Αλλά τότε
$$|z_n + w_n| \geq |z_n| - |w_n| \geq |z_n| - M \to +\infty.$$
Άρα $z_n + w_n \to \infty$.
(2) Αν η w_n συγκλίνει σε κάποιο μη μηδενικό αριθμό ή αν τείνει στο άπειρο, τότε υπάρχει κάποιο $c > 0$ και κάποιος φυσικός n_0 έτσι ώστε $|w_n| \geq c$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε τέτοιο n έχουμε
$$|z_n w_n| \geq c|z_n| \to +\infty.$$
Συνεπώς $z_n w_n \to \infty$.
(3) Προκύπτει άμεσα από ότι μια ακολουθία θετικών αριθμών συγκλίνει στο μηδέν αν και μόνο αν η ακολουθία των αντιστρόφων τείνει στο $+\infty$.

□

Παρατήρηση. Γενικά δεν είναι αλήθεια ότι το άθροισμα δυο ακολουθιών που τείνουν στο άπειρο τείνει στο άπειρο. Για παράδειγμα οι ακολουθίες $z_n = n$, $w_n = -n$ τείνουν στο ∞, αλλά $z_n + w_n = 0$.

Θεώρημα 3.5. *Έστω $z \in \mathbb{C}$. Θέτουμε $z_n = z^n$.*

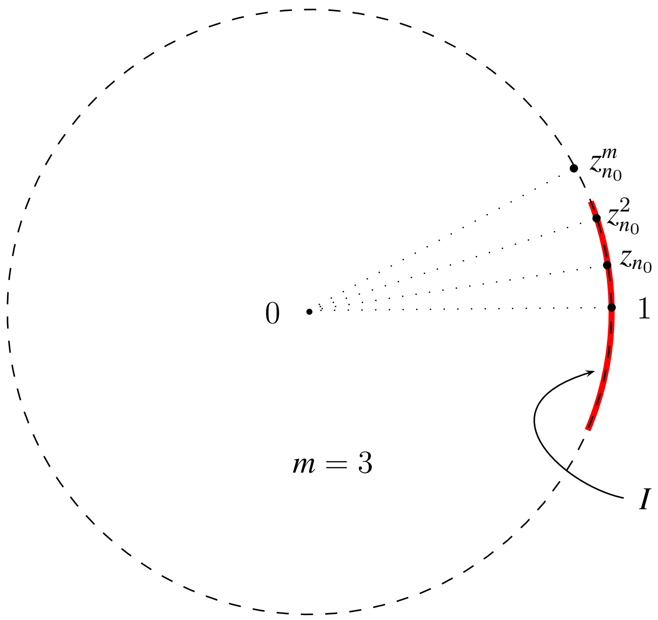
(1) *Αν $|z| < 1$ τότε $z_n \to 0$.*
(2) *Αν $|z| > 1$ τότε $z_n \to \infty$.*
(3) *Αν $|z| = 1$ τότε η z_n συγκλίνει μόνο για $z = 1$.*

Απόδειξη.

(1) Αν $|z| < 1$ τότε $|z|^n \to 0$, άρα $z_n \to 0$.
(2) Αν $|z| > 1$ τότε $|z|^n \to +\infty$, άρα $z_n \to \infty$.
(3) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι αν η z_n συγκλίνει για κάποιο z με $|z| = 1$, τότε κατ' ανάγκη $z_n \to 1$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $z_n \to a$, τότε $|z_n| \to |a|$. Αλλά $|z_n| = |z|^n = 1$, άρα $|a| = 1$, ιδιαίτερα $a \neq 0$. Απ' την άλλη, $z_n^2 \to a^2$, αλλά $z_n^2 = z^{2n} = z_{2n} \to a$. Επομένως $a^2 = a$ και $a \neq 0$, συνεπώς $a = 1$. Τώρα, αν $z \neq 1$, τότε η z_n δεν είναι σταθερή. Γράφουμε $z = e^{it}$ για κάποιο $t \in (0, 2\pi)$. Αν το t είναι ρητό πολλαπλάσιο τού 2π, δηλαδή $t = 2k\pi/\ell$ για κάποια $k \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε n έχουμε

$$z_{n+\ell} = \left(e^{2k\pi i/\ell}\right)^{n+\ell} = e^{2kn\pi i/\ell} \cdot e^{2k\pi i} = e^{int} = z_n.$$

Έτσι η z_n είναι μη σταθερή και περιοδική, άρα αποκλείεται να συγκλίνει. Αν το t δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο τού 2π, τότε $z_n \neq 1$ για κάθε n. Ας υποθέσουμε ότι $z_n \to 1$. Πάνω στο μοναδιαίο κύκλο θεωρούμε το τόξο I με κέντρο 1 και μήκος $1/1000$.



Αφού $z_n \to 1$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $z_n \in I$ για κάθε $n \geq n_0$. Αφού το σημείο z_{n_0} είναι διαφορετικό από το 1 και ανήκει στο I, για $m \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο, το σημείο $z_{n_0}^m$ θα βγει έξω από το I. Αυτό μπορεί να αιτιολογηθεί ως εξής. Αν το z_{n_0} είναι στο άνω ημιεπίπεδο, επιλέγουμε m έτσι ώστε $1/499 < m \arg z_{n_0} < 1$. Από το θεώρημα 1.2, $\arg(z_{n_0}^m) = \arg(z_{n_0} \cdots z_{n_0}) = \arg z_{n_0} + \cdots + \arg z_{n_0} = m \arg z_{n_0}$. Έτσι το όρισμα τού $z_{n_0}^m$, δηλαδή η γωνία θέσης του, είναι ανάμεσα στο $1/499$ και το 1, άρα το $z_{n_0}^m$ δεν μπορεί να ανήκει στο I διότι τα σημεία τού τόξου που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο έχουν γωνία θέσης μικρότερη από $1/500$. Αν το z_{n_0} ανήκει στο κάτω ημιεπίπεδο, τότε το $\overline{z}_{n_0}$

ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο, άρα κάποια δύναμη του θα βγει προς τα πάνω έξω από το I. Επομένως η ίδια δύναμη τού z_{n_0} θα βγει προς τα κάτω έξω από το I, αφού το I είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα. Αλλά $z_{n_0}^m = z_{mn_0}$, άτοπο γιατί όλα τα z_n με $n \geq n_0$ ανήκουν στο I. Συμπεραίνουμε ότι η z_n συγκλίνει μόνο για $z = 1$.

□

Η σύγκλιση μιας σειράς μιγαδικών αριθμών ορίζεται ακριβώς όπως στην περίπτωση μιας σειράς πραγματικών αριθμών. Έστω $z_n \in \mathbb{C}$ μια ακολουθία. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **συγκλίνει** και έχει **άθροισμα** $z \in \mathbb{C}$, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ συγκλίνει στο z. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z.$$

Η σημαντικότερη σειρά στη Μιγαδική Ανάλυση είναι η γεωμετρική.

Θεώρημα 3.6. *Έστω* $z \in \mathbb{C}$.

(1) *Αν* $|\lambda| < 1$ *τότε* $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n = \frac{\lambda}{1-\lambda}$.

(2) *Αν* $|\lambda| \geq 1$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n$ *δεν συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αν $\lambda = 1$ τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς είναι

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to \infty,$$

άρα η σειρά δεν συγκλίνει. Αν $\lambda \neq 1$ τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k = \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda},$$

και το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα 3.5. □

Παρατήρηση. Αν ξεκινήσουμε τη γεωμετρική σειρά από $n = 0$, τότε για $|\lambda| < 1$ παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1 - \lambda}. \tag{3.1}$$

Όρια συναρτήσεων και συνέχεια

Έστω $A \subset \mathbb{C}$ και $z_0 \in \mathbb{C}$ ένα σημείο. Υποθέτουμε ότι σε κάθε περιοχή του z_0 υπάρχουν σημεία τού A διαφορετικά από το z_0. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση και $\ell \in \mathbb{C}$. Λέμε ότι **το όριο τής f καθώς το z τείνει στο z_0 είναι ίσο με ℓ** και γράφουμε

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell,$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$ έχουμε $|f(z) - \ell| < \varepsilon$. Δηλαδή καθώς το z πλησιάζει το z_0 χωρίς να γίνεται ίσο με z_0, το $f(z)$ πλησιάζει το ℓ. Ισοδύναμα, για κάθε περιοχή τού ℓ υπάρχει περιοχή τού z_0 έτσι ώστε κάθε σημείο τού πεδίου ορισμού τής f που βρίσκεται μέσα στην περιοχή τού z_0 και δεν είναι ίσο με z_0 απεικονίζεται στην περιοχή τού ℓ. Το ότι σε οποιαδήποτε περιοχή τού z_0 υπάρχουν σημεία τού πεδίου ορισμού τής f διαφορετικά από το z_0 εξασφαλίζεται από την υπόθεση που κάναμε για το z_0 και το A στην αρχή αυτής τής παραγράφου. Από τώρα και στο εξής, όταν μιλάμε για όριο τής f σε κάποιο z_0 πάντα θα κάνουμε αυτή την υπόθεση. Την ίδια υπόθεση θα κάνουμε και για όλα τα σημεία τού A. Όρια τα οποία εμπλέκουν το μιγαδικό άπειρο ορίζονται με ανάλογο τρόπο.

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$ έχουμε $|f(z)| > M$.
- Για A μη φραγμένο, $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \ell$, αν για κάθε ε υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in A$ με $|z| > R$ έχουμε $|f(z) - \ell| < \varepsilon$.
- Για A μη φραγμένο, $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in A$ με $|z| > R$ έχουμε $|f(z)| > M$.

Παρατηρώντας τους προηγούμενους ορισμούς βλέπουμε ότι μια ποσότητα τείνει στο μιγαδικό άπειρο αν και μόνο αν το μέτρο της τείνει στο $+\infty$. Έτσι μπορούμε εναλλακτικά να γράψουμε:

- $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.
- $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f(z) = \ell$.
- $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$.

Χρησιμοποιώντας το ακόλουθο αποτέλεσμα, μπορούμε να ανάγουμε τη σύγκλιση μιας συνάρτησης στη σύγκλιση ακολουθιών.

Θεώρημα 3.7. *Έστω $A \subset \mathbb{C}$, ένα z_0 σημείο (το z_0 μπορεί να είναι ∞), και $f : A \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Τότε $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$ (το ℓ μπορεί να είναι ∞) αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $z_n \in A$ με $z_n \neq z_0$ και $z_n \to z_0$, έχουμε ότι $f(z_n) \to \ell$.*

Οι επιτρεπτές αλγεβρικές πράξεις με όρια είναι οι ίδιες με αυτές τής περίπτωσης ακολουθιών.

Θεώρημα 3.8. *Έστω $A \subset \mathbb{C}$, ένα z_0 (το z_0 μπορεί να είναι ∞), και $f, g : A \to \mathbb{C}$ δυο συναρτήσεις τέτοιες ώστε τα όριά τους καθώς το z τείνει στο z_0 υπάρχουν και είναι πεπερασμένα. Τότε:*

(1) *Το όριο τού αθροίσματος υπάρχει και*

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z).$$

(2) *Το όριο τού γινομένου υπάρχει και*

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z).$$

(3) *Αν επιπλέον το όριο τής f δεν είναι μηδέν, τότε*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\lim_{z \to z_0} f(z)}.$$

Όπως και στην περίπτωση των ακολουθιών, αν το όριο τής f δεν είναι μηδέν, υπάρχει περιοχή D τού z_0 τέτοια ώστε για κάθε $z \in D \cap A$ με $z \neq z_0$, το $f(z)$ δεν είναι μηδέν, άρα έχει νόημα να γράψουμε $1/f(z)$ για όλα αυτά τα z.

Θεώρημα 3.9. *Έστω $A \subset \mathbb{C}$, z_0 ένα σημείο (το z_0 μπορεί να είναι ∞), και $f, g : A \to \mathbb{C}$ δυο συναρτήσεις.*

(1) *Αν $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ και η g είναι φραγμένη τότε $\lim_{z\to z_0}(f(z) + g(z)) = \infty$.*

(2) *Αν $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ και το $\lim_{z\to z_0} g(z)$ μη μηδενικό ή άπειρο, τότε $\lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)) = \infty$.*

(3) *Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια περιοχή D τού z_0 τέτοια ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D \cap A$ με $z \neq z_0$. Τότε*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = \infty.$$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι το αντίστοιχο τού θεωρήματος 3.1.

Θεώρημα 3.10. *Έστω $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ ένα (πεπερασμένο) σημείο, $\ell \in \mathbb{C}$ κάποιο σημείο, και $f : A \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Re\mathrm{e}\, f(x,y) = \Re\mathrm{e}\,\ell$ *και* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Im\mathrm{m}\, f(x,y) = \Im\mathrm{m}\,\ell$.

Τα όρια στο (2) είναι με την έννοια τού Απειροστικού Λογισμού ΙΙ, δηλαδή όρια πραγματικών συναρτήσεων δυο πραγματικών μεταβλητών.

Απόδειξη.

(1)⇒(2) Έστω (x_n, y_n) μια ακολουθία στο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in A\}$ με $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$, τέτοια ώστε $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Τότε $x_n \to x_0$ και $y_n \to y_0$, άρα αν θέσουμε $z_n = x_n + iy_n$ παίρνουμε ότι $z_n \to z_0$. Αφού η f συγκλίνει στο ℓ καθώς $z \to z_0$ έχουμε ότι $f(z_n) \to \ell$, άρα $\Re\mathrm{e}\, f(x_n, y_n) \to \Re\mathrm{e}\,\ell$ και $\Im\mathrm{m}\, f(x_n, y_n) \to \Im\mathrm{m}\,\ell$. Αλλά η (x_n, y_n) ήταν τυχούσα, επομένως παίρνουμε το (2).

(2)⇒(1) Έστω z_n μια ακολουθία στο A με $z_n \neq z_0$ τέτοια ώστε $z_n \to z_0$. Γράφουμε $z_n = x_n + iy_n$. Τότε $x_n \to x_0$ και $y_n \to y_0$, άρα $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Επομένως από υπόθεση $\Re\mathrm{e}\, f(x_n, y_n) \to \Re\mathrm{e}\,\ell$ και $\Im\mathrm{m}\, f(x_n, y_n) \to \Im\mathrm{m}\,\ell$. Συνεπώς $f(z_n) \to \ell$, το οποίο μας δίνει το (1) αφού η z_n ήταν τυχούσα.

□

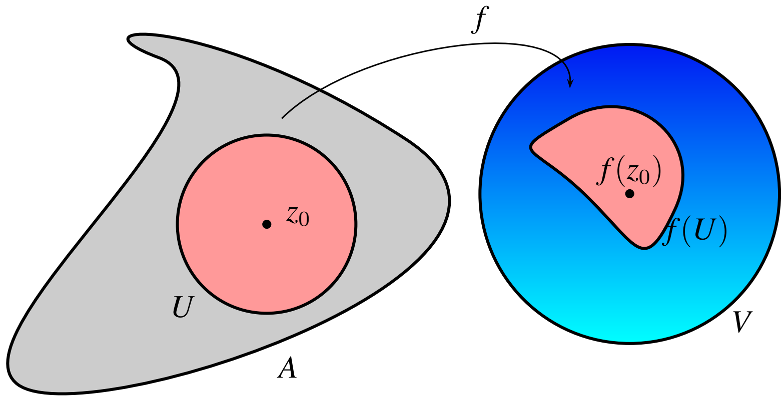
Παρατήρηση. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι το όριο μιας συνάρτησης καθώς το z τείνει σε κάποιο σημείο **δεν εξαρτάται από τον τρόπο που προσεγγίζουμε το σημείο**. Αυτό προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα που έχουν τα όρια πραγματικών συναρτήσεων δυο πραγματικών μεταβλητών.

Παραδείγματα.

- Το όριο μιας σταθερής συνάρτησης καθώς το z τείνει σε οποιοδήποτε σημείο ή στο ∞ είναι ίσο με την τιμή τής συνάρτησης.
- $\lim_{z\to z_0} z = z_0$, $\lim_{z\to\infty} z = \infty$, $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$, $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$. Γενικότερα αν το P είναι πολυώνυμο, δηλαδή $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, τότε $\lim_{z\to z_0} P(z) = P(z_0)$, $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$ και $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{P(z)} = 0$.
- $|\operatorname{Log} z| = |\ln|z| + i\arg z| \geq \ln|z| - 2\pi \to +\infty$ καθώς $z \to \infty$, άρα $\lim_{z\to\infty} \operatorname{Log} z = \infty$.
- Το όριο τής εκθετικής συνάρτησης e^z καθώς $z \to \infty$ δεν υπάρχει γιατί αν θέσουμε $z_n = i\pi n$, τότε $z_n \to \infty$, αλλά η ακολουθία $e^{z_n} = e^{i\pi n} = \cos(\pi n)$ ούτε συγκλίνει ούτε τείνει στο άπειρο. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι το όριο τού $\sin z$ και τού $\cos z$ καθώς

$z \to \infty$ δεν υπάρχουν. Γενικότερα, ακριβώς όπως στην περίπτωση ακολουθιών, το όριο καθώς $z \to \infty$ μιας περιοδικής συνάρτησης δεν υπάρχει, εκτός κι΄ αν η συνάρτηση είναι σταθερή.

Έστω τώρα ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ ένα σημείο, και $f : A \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο z_0** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$ έχουμε $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Ισοδύναμα, για κάθε περιοχή V τού $f(z_0)$ υπάρχει περιοχή U τού z_0 η οποία απεικονίζεται μέσα στην περιοχή τού $f(z_0)$, δηλαδή $f(A \cap U) \subset V$.



Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο τού πεδίου ορισμού της τότε λέμε ότι είναι συνεχής. Η έννοια τού ορίου και η έννοια τής συνέχειας σχετίζονται άμεσα.

Θεώρημα 3.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση και $z_0 \in A$. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Θεώρημα 3.12. *Μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 + iy_0 \in A$ αν και μόνο αν το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι συνεχείς (με την έννοια τού Απειροστικού Λογισμού ΙΙ) στο σημείο (x_0, y_0).*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τα θεωρήματα 3.11 και 3.10. □

Θεώρημα 3.13. *Μια $f : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής σε κάποιο $z_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $z_n \in A$ με $z_n \to z_0$ έχουμε $f(z_n) \to f(z_0)$.*

Θεώρημα 3.14. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{C}$ συνεχείς σε κάποιο $z_0 \in A$.*

(1) *Η $f + g$ και η fg είναι συνεχείς στο z_0.*
(2) *Αν επιπλέον $f(z_0) \neq 0$ τότε η f δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή τού z_0, η $\frac{1}{f(z)}$ είναι καλά ορισμένη σ' αυτήν την περιοχή, και είναι συνεχής στο z_0.*
(3) *Αν μια h είναι ορισμένη στο πεδίο τιμών τής f και συνεχής στο $f(z_0)$ τότε η σύνθεση $h \circ f$ είναι συνεχής στο z_0.*

Παραδείγματα.

(1) Κάθε πολυώνυμο P είναι συνεχής συνάρτηση διότι $\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0)$ για κάθε z_0. Άρα και κάθε **ρητή** συνάρτηση, δηλαδή πηλίκο πολυωνύμων, είναι συνεχής.
(2) Η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής γιατί το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι $e^x \cos y$ και $e^x \sin y$ αντίστοιχα, και οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς. Για τον ίδιο λόγο οι συναρτήσεις $|z|$ και $\bar{z}$ είναι συνεχείς. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς ως συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων.

(3) Εξετάζουμε τώρα τη συνέχεια τής συνάρτησης arg. Υπενθυμίζουμε ότι το arg είναι ορισμένο στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και έχει τύπο

$$\arg(x+iy) = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } y \geq 0 \\ \\ 2\pi - \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } y < 0 \end{cases}.$$

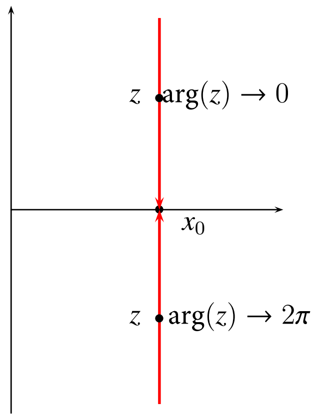
Βλέπουμε αμέσως ότι είναι συνεχές για $y > 0$ ή $y < 0$ διότι οι αντίστοιχοι κλάδοι είναι συνεχείς. Μένει να δούμε τι γίνεται στον πραγματικό άξονα, δηλαδή για $y = 0$, $x \neq 0$. Σταθεροποιούμε λοιπόν $x_0 \in \mathbb{R}$ με $x_0 \neq 0$. Αν $x_0 < 0$ τότε το όριο τού arg καθώς προσεγγίζουμε το x_0 για $y \geq 0$ είναι

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ y\geq 0}} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2}} = \arccos(-1) = \pi.$$

Το όριο καθώς προσεγγίζουμε το x_0 από το κάτω ημιεπίπεδο είναι

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ y<0}} \left(2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 2\pi - \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2}} = 2\pi - \arccos(-1) = \pi.$$

Συνεπώς για αρνητικά x_0 έχουμε $\lim_{z\to x_0} \arg(z) = \pi = \arg(z_0)$. Επομένως το arg είναι συνεχές στον αρνητικό ημιάξονα. Τώρα, για $x_0 > 0$, τα όρια καθώς προσεγγίζουμε το x_0 "από πάνω" και "από κάτω" είναι διαφορετικά.



Πράγματι, το όριο αν προσεγγίσουμε το x_0 κατά μήκος τής ημιευθείας $x = x_0$, $y > 0$, δηλαδή "από πάνω", είναι

$$\lim_{y\to 0+} \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y^2}} = \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2}} = \arccos 1 = 0.$$

Ενώ το όριο αν προσεγγίσουμε το x_0 κατά μήκος τής ημιευθείας $x = x_0$, $y < 0$, δηλαδή "από κάτω", είναι

$$\lim_{y\to 0-} \left(2\pi - \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y^2}}\right) = 2\pi - \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2}} = 2\pi - \arccos 1 = 2\pi.$$

Άρα το arg δεν είναι συνεχές στον θετικό ημιάξονα. Συμπεραίνουμε ότι το όρισμα είναι συνεχής συνάρτηση παντού στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ **εκτός από τον θετικό ημιάξονα**.

(4) Όπως στο προηγούμενο πράδειγμα, η $\sqrt[n]{z}$ και ο λογάριθμος, που ορίζονται μέσω τού arg, είναι **ασυνεχείς** στον θετικό ημιάξονα και συνεχείς σε οποιοδήποτε άλλο μη μηδενικό σημείο. Πράγματι, αν $x_0 > 0$ τότε

$$\lim_{\substack{x+iy\to x_0\\ x=x_0,\ y>0}} \sqrt[n]{x+iy} = \lim_{y\to 0+} \sqrt[n]{|x_0+iy|}\, e^{i\frac{\arg(x_0+iy)}{n}} = \sqrt[n]{x_0},$$

αλλά

$$\lim_{\substack{x+iy\to x_0\\ x=x_0,\ y<0}} \sqrt[n]{x+iy} = \lim_{y\to 0-} \sqrt[n]{|x_0+iy|}\, e^{i\frac{\arg(x_0+iy)}{n}} = \sqrt[n]{x_0}\, e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Ομοίως

$$\lim_{\substack{x+iy\to x_0\\ x=x_0,\ y>0}} \operatorname{Log}(x+iy) = \lim_{y\to 0+} \ln|x_0+iy| + i\arg(x_0+iy) = \ln x_0,$$

και

$$\lim_{\substack{x+iy\to x_0\\ x=x_0,\ y<0}} \operatorname{Log}(x+iy) = \lim_{y\to 0-} \ln|x_0+iy| + i\arg(x_0+iy) = \ln x_0 + i2\pi.$$

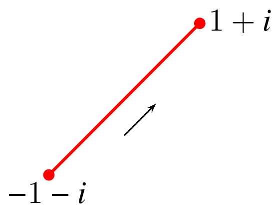
Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με δυο αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των συνεχών συναρτήσεων σε συμπαγή σύνολα.

Θεώρημα 3.15. *Αν το A είναι συμπαγές και η $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε το $f(A)$ είναι συμπαγές.*

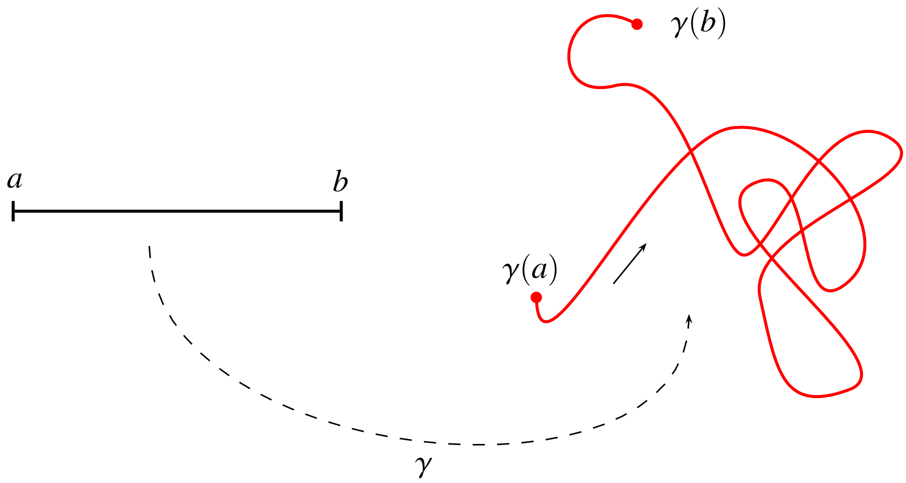
Θεώρημα 3.16. *Αν το A είναι συμπαγές και η $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε η f είναι φραγμένη, και η $|f|$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Καμπύλες

Μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα πραγματικών αριθμών λέγεται **παραγωγίσιμη** αν το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με τη συνηθισμένη έννοια τού Απειροστικού Λογισμού. Η παράγωγος μιας τέτοιας f ορίζεται να είναι $f'(t) = (\Re f)'(t) + i(\Im f)'(t)$. Για παράδειγμα, η $f(t) = t^2 + i \sin t$, $t \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $f'(t) = 2t + i \cos t$. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε η γ' είναι συνεχής ονομάζεται **καμπύλη**. Λέμε ότι το $\gamma(a)$ είναι η **αρχή** και το $\gamma(b)$ το **τέλος** τής καμπύλης. Για παράδειγμα, η $t+it$, $t \in [-1, 1]$, είναι μια καμπύλη με αρχή $-1-i$ και τέλος $1+i$. Ο πιο φυσιολογικός τρόπος να σκεφτόμαστε μια καμπύλη είναι ότι καθώς το t διατρέχει το $[a, b]$ το σημείο $\gamma(t)$ διαγράφει μια τροχιά στο επίπεδο. Η τροχιά τής $t + it$,$t \in [-1, 1]$, που αναφέραμε πριν είναι:



Γενικότερα έχουμε



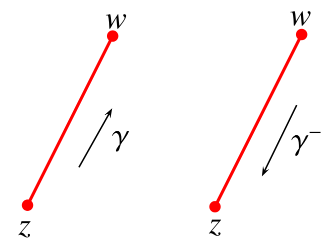
Συνχνά δεν διακρίνουμε την καμπύλη, δηλαδή τη συνάρτηση γ, από την τροχιά της, δηλαδή την εικόνα $\gamma([a, b])$. Έτσι όταν λέμε "καμπύλη" μπορεί να εννούμε οτιδήποτε από τα δυο. Συνήθως δεν υπάρχει κίνδυνος αυτό να δημιουργήσει σύγχυση. Αν υπάρχει τότε χρησιμοποιούμε το σύμβολο γ^* για την τροχιά. Φυσικά σαν έννοιες είναι εντελώς διαφορετικές. Η γ είναι συνάρτηση, ενώ η γ^* είναι σύνολο σημείων. Παρατηρήστε ότι από το θεώρημα 3.15, η τροχιά είναι συμπαγές σύνολο.

Παραδείγματα.

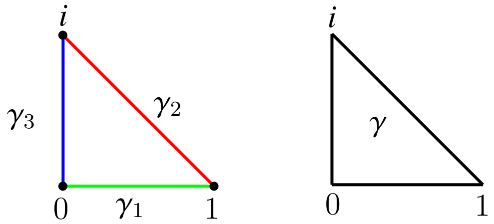
- Η τροχιά τής e^{it}, $t \in [0, 2\pi]$, είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Γενικότερα, αν $r > 0$ και $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε η τροχιά τής $z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, είναι ο κύκλος $C(z_0, r)$.
- Η τροχιά τής e^{it}, $t \in [0, 4\pi]$, είναι πάλι ο μοναδιαίος κύκλος. Η διαφορά από το προηγούμενο παράδειγμα είναι ότι τώρα ο κύκλος διαγράφεται δυο φορές.

- Η τροχιά τής e^{-it}, $t \in [0, 2\pi]$, είναι ξανά ο μοναδιαίος κύκλος. Εδώ η διαφορά είναι ότι διαγράφεται (μια φορά) δεξιόστροφα, ενώ στα προηγούμενα παραδείγματα διαγραφόταν αριστερόστροφα.
- Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, τότε η τροχιά τής $(t-1)z_1 + tz_2$, $t \in [0, 1]$, είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[z_1, z_2]$.

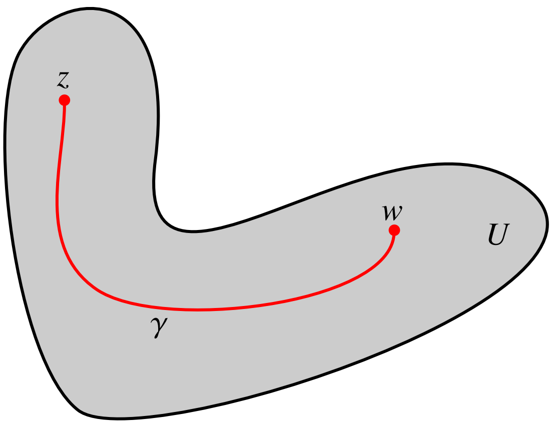
Αν $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι μια καμπύλη, τότε η **αντίθετη** καμπύλη συμβολίζεται με γ^- και ορίζεται να είναι η συνάρτηση $\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$, $t \in [a, b]$. Η τροχιά τής γ^- είναι η ίδια με την τροχιά τής γ, αλλά διαγράφεται με την αντίθετη φορά. Για παράδειγμα η $\gamma(t) = (1-t)z + tw$, $t \in [0, 1]$, διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $[z, w]$. Η αντίθετη είναι η $\gamma^-(t) = tz + (1-t)w$ και διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $[w, z]$.



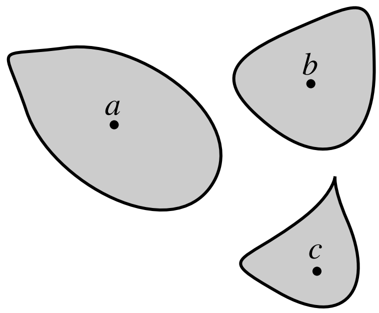
Ένα **μονοπάτι** γ είναι μια αλληλουχία από διαδοχικές καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Διαδοχικές καμπύλες σημαίνει ότι το τέλος τής γ_1 είναι ίσο με την αρχή τής γ_2, το τέλος τής γ_2 είναι ίσο με την αρχή τής γ_3 και ούτω καθεξής. Η τροχιά γ^* τού γ είναι η ένωση των τροχιών των καμπύλων που το αποτελούν, και είναι συμπαγές σύνολο σαν ένωση πεπερασμένου πλήθους συμπαγών συνόλων. Για παράδειγμα, αν η γ_1 διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $[0, 1]$, η γ_2 το $[1, i]$ και η γ_3 το $[i, 0]$, τότε το μονοπάτι γ από τις καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ διαγράφει το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $0, 1, i$.



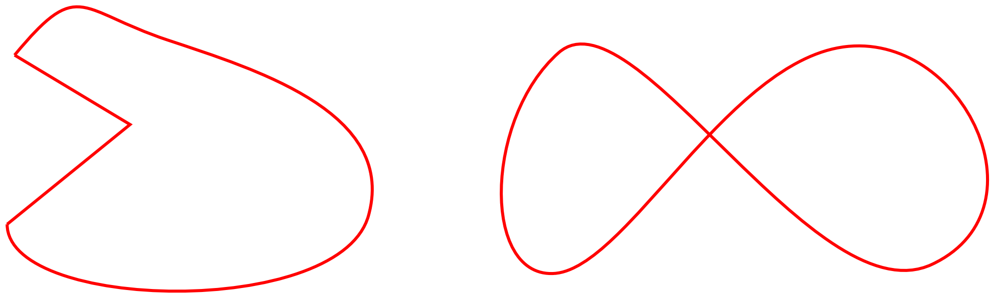
Προφανώς κάθε καμπύλη είναι μονοπάτι. Επίσης, όπως στην περίπτωση καμπύλης, συχνά δεν διακρίνουμε ένα μονοπάτι και την τροχιά του. Το αντίθετο ενός μονοπατιού αποτελείται από τις αντίθετες των καμπύλων που το απαρτίζουν. Τώρα, ένα ανοιχτό σύνολο U ονομάζεται **συνεκτικό** αν για κάθε δυο σημεία του υπάρχει καμπύλη στο U η οποία τα συνδέει. Δηλαδή για κάθε $z, w \in U$ υπάρχει $\gamma : [a, b] \to U$ με $\gamma(a) = z$ και $\gamma(b) = w$.



Ένα μη συνεκτικό σύνολο είναι "σπασμένο σε κομμάτια". Στο σχήμα παρακάτω τα σημεία a, b και c δεν μπορούν να συνδεθούν με καμπύλες οι οποίες να βρίσκονται μέσα στο σύνολο.



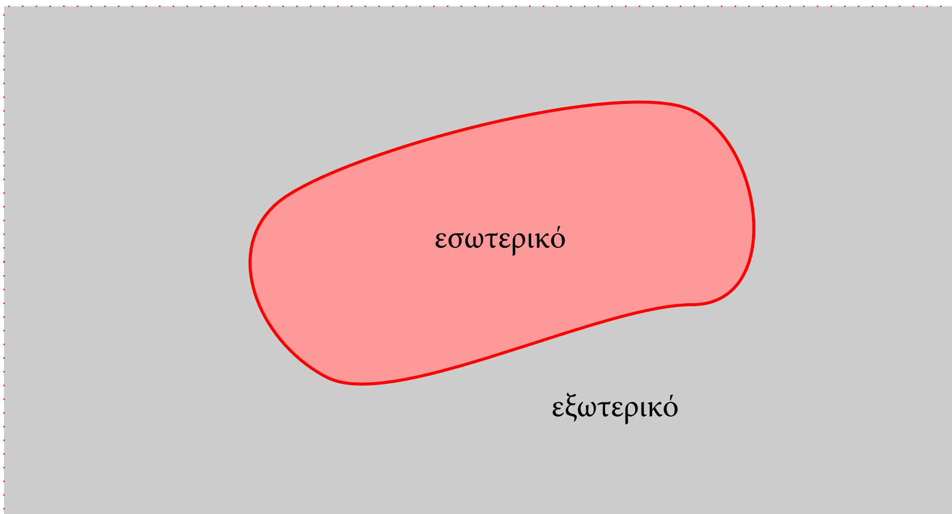
Ένα μονοπάτι γ λέγεται **κλειστό**, αν η αρχή τής πρώτης από τις καμπύλες που το αποτελούν είναι ίση με το τέλος τής τελευταίας, αν δηλαδή καταλήγει στο σημείο από όπου ξεκίνησε. Το γ λέγεται **μονοπάτι Jordan** (ή **απλό κλειστό μονοπάτι**), αν είναι κλείστό και δεν τέμνει τον εαυτό του σε άλλα σημεία εκτός από τα άκρα (τα οποία ταυτίζονται).



Απλό

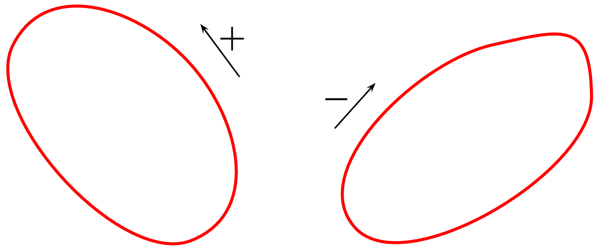
Όχι απλό

Αποδεικνύεται ότι ένα μονοπάτι Jordan χωρίζει το επίπεδο δυο ξένα ανοιχτά και συνεκτικά σύνολα. Ένα φραγμένο που ονομάζεται **εσωτερικό** τού μονοπατιού, και ένα μη φραγμένο που ονομάζεται **εξωτερικό** τού μονοπατιού.



Παρά το ότι αυτό είναι διαισθητικά προφανές, μια αυστηρή απόδειξη είναι αρκετά δύσκολη και ξεφεύγει από τα πλαίσια τού μαθήματος. Από τώρα και στο εξής θα κάνουμε την παραδοχή ότι

όλα τα κλειστά μονοπάτια είναι Jordan, και ότι όλα τα μη κλειστά **δεν τέμνουν τον εαυτό τους**. Αν ένα κλειστό μονοπάτι διαγράφεται αριστερόστροφα τότε λέμε ότι το μονοπάτι είναι **θετικά προσανατολισμένο**. Διαφορετικά λέμε ότι είναι **αρνητικά προσανατολισμένο**.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ακολουθίες και σειρές μιγαδικών συναρτήσεων - δυναμοσειρές

Έστω $A \subset \mathbb{C}$ και $f_n : A \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία συναρτήσεων. Λέμε ότι η f_n **συγκλίνει κατά σημείο** σε κάποια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ αν $f_n(z) \to f(z)$ για κάθε $z \in A$. Λέμε ότι η f_n **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην f αν για κάθε ε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $z \in A$ έχουμε $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Η διαφορά των δυο εννοιών είναι ότι στην ομοιόμορφη σύγκλιση το n_0 εξαρτάται μόνο από το ε και όχι από το σημείο z. Αποδεικνύεται ότι αν οι f_n είναι συνεχείς, τότε και η f είναι συνεχής. Στην περίπτωση αυτή, αν επιπλέον το A είναι συμπαγές, τότε η ομοιόμορφη σύγκλιση τής f_n στην f συνεπάγεται ότι

$$\max_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0.$$

Παρατηρήστε ότι το max υπάρχει από το θεώρημα 3.16. Η σύγκλιση σειρών συναρτήσεων ορίζεται με ανάλογο τρόπο. Λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει κατά σημείο στην f αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει κατά σημείο στην f. Ομοίως, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει ομοιόμορφα.

Θεώρημα 4.1 (Κριτήριο Weierstrass)**.** *Έστω $A \subset \mathbb{C}$, $f_n : A \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία συναρτήσεων, και M_n μια ακολουθία θετικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι*

- *$|f_n(z)| \leq M_n$ για κάθε n και κάθε $z \in A$.*
- *Η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει.*

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Έστω τώρα $a_n \in \mathbb{C}$ μια ακολουθία. Μια σειρά συναρτήσεων τής μορφής $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ λέγεται **δυναμοσειρά με κέντρο z_0** (τις δυναμοσειρές τις ξεκινάμε από $n = 0$). Μπορούμε να σκεφτόμαστε μια δυναμοσειρά σαν ένα "πολυώνυμο άπειρου βαθμού". Παρατηρήστε ότι μια δυναμοσειρά συγκλίνει πάντα για $z = z_0$. Στην περίπτωση αυτή είναι ίση με a_0.

Θεώρημα 4.2. *Έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω.*

(1) *Η σειρά συγκλίνει μόνο για $z = z_0$.*

(2) *Υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε η σειρά*
   - *Συγκλίνει* **κατά σημείο** *για κάθε z με $|z - z_0| < R$, δηλαδή στον δίσκο $D(z_0, R)$.*
   - *Συγκλίνει* **ομοιόμορφα** *σε κάθε* **συμπαγές** *υποσύνολο τού δίσκου.*
   - **Δεν συγκλίνει** *για κανένα z με $|z - z_0| > R$, δηλαδή στο εξωτερικό τού δίσκου.*

   Τι γίνεται στο σύνορο τού δίσκου, δηλαδή στον κύκλο, δεν το λέει το θεώρημα.

(3) *Η σειρά*
   - *Συγκλίνει κατά σημείο για κάθε $z \in \mathbb{C}$.*
   - *Συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{C}$.*

Ο αριθμός $R > 0$ στην περίπτωση (2) ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης τής δυναμοσειράς** και είναι η ακτίνα τού μεγαλύτερου ανοιχτού δίσκου με κέντρο το z_0 μέσα στον οποίο η σειρά συγκλίνει. Στην περίπτωση (1) κάνουμε τη σύμβαση $R = 0$. Στην περίπτωση (3) κάνουμε τη σύμβαση $R = +\infty$. Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τύπους για την ακτίνα σύγκλισης.

Θεώρημα 4.3. *Έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R.*

- *Αν το $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ υπάρχει και είναι ίσο με r, τότε $R = \frac{1}{r}$.*

- *Αν* $a_n \neq 0$ *για κάθε* n *και το* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *υπάρχει και είναι ίσο με* r *τότε* $R = \frac{1}{r}$.

Και στις δύο περιπτώσεις, αν $r = 0$ *τότε* $R = +\infty$, *και αν* $r = +\infty$ *τότε* $R = 0$.

Παραδείγματα.

- Η ακτίνα σύγκλισης τής $\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n$ είναι 0 γιατί $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to +\infty$.
- Η ακτίνα σύγκλισης τής $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ είναι $+\infty$ γιατί $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$. Θα δούμε παρακάτω ότι το όριό της είναι η εκθετική συνάρτηση.
- Η ακτίνα σύγκλισης τής $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ είναι 1 γιατί $\sqrt[n]{1} = 1$. Από το θεώρημα 3.6 έχουμε ότι μέσα στο δίσκο $D(0, 1)$ η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$. Έξω από τον δίσκο δεν συγκλίνει από το θεώρημα 4.2 (ή το θεώρημα 3.6). Πάνω στον κύκλο δεν συγκλίνει από το θεώρημα 3.6 (το θεώρημα 4.2 δεν λέει τι γίνεται στον κύκλο).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αναλυτικές συναρτήσεις

Η μιγαδική παράγωγος

Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : U \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Η f λέγεται **αναλυτική** αν για κάθε $z_0 \in U$ το όριο

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Η τιμή του συμβολίζεται με $f'(z_0)$ και ονομάζεται **παράγωγος** τής f στο z_0. Η συνάρτηση που προκύπτει έχει πεδίο ορισμού το U, συμβολίζεται με f' και ονομάζεται **παράγωγος** τής f.

Παραδείγματα.

- Η σταθερή συνάρτηση είναι αναλυτική και η παράγωγός της είναι η μηδενική συνάρτηση.
- Η συνάρτηση $f(z) = z, z \in \mathbb{C}$, είναι αναλυτική και $f'(z) = 1$ για κάθε z. Γενικότερα, αν $n \in \mathbb{Z}$, τότε η z^n είναι αναλυτική (σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$ αν $n \geq 0$, στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, αν $n < 0$), και $(z^n)' = nz^{n-1}$. Η απόδειξη είναι αυτολεξεί μεταφορά τής απόδειξης τού αντίστοιχου αποτελέσματος στον Απειροστικό Λογισμό.
- Η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}$ **δεν είναι** αναλυτική σε κανένα ανοιχτό σύνολο. Πράγματι, ας σταθεροποιήσουμε τυχόν $z_0 = x_0 + iy_0$. Αν προσεγγίσουμε το $x_0 + iy_0$ κατά μήκος τής κάθετης ευθείας $x = x_0$ έχουμε

$$\lim_{\substack{x+iy \to x_0+iy_0 \\ x=x_0}} \frac{f(x+iy) - f(x_0+iy_0)}{x+iy-x_0-iy_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{-i(y-y_0)}{i(y-y_0)} = -1.$$

  Αν προσεγγίσουμε το $x_0 + iy_0$ κατά μήκος τής οριζόντιας ευθείας y_0 έχουμε

$$\lim_{\substack{x+iy \to x_0+iy_0 \\ y=y_0}} \frac{f(x+iy) - f(x_0+iy_0)}{x+iy-x_0-iy_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

  Βλέπουμε λοιπόν ότι τα όρια καθώς προσεγγίζουμε το z_0 κατά μήκος διαφορετικών κατευθύνσεων δεν είναι ίσα, επομένως το

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

  δεν υπάρχει.

Τα ακόλουθα αποτελέσματα παραπέμπουν σε οικεία αποτελέσματα τού Απειροστικού Λογισμού και οι αποδείξεις τους είναι τελείως ανάλογες.

Θεώρημα 5.1. *Αν το $U \subset \mathbb{C}$ είναι ανοιχτό και η $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, τότε η f είναι συνεχής. Ιδιαίτερα, το πραγματικό και το φανταστικό μερος τής f είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

Παρατήρηση. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα η $f(z) = \overline{z}$ είναι συνεχής, αλλά όπως είδαμε δεν είναι αναλυτική.

Θεώρημα 5.2. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, και $f, g : U \to \mathbb{C}$ αναλυτικές. Τότε*

(1) *Η $f+g$ είναι αναλυτική και $(f+g)' = f' + g'$.*
(2) *Η fg είναι αναλυτική και $(fg)' = f'g + fg'$.*
(3) *Αν επιπλέον η g δεν μηδενίζεται τότε η $\frac{1}{g}$ είναι αναλυτική και*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Παρατήρηση. Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι τα πολυώνυμα και τα πηλίκα πολυωνύμων είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 5.3 (Κανόνας αλυσίδας)**.** *Έστω $U, V \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά, και $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ αναλυτικές. Τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι αναλυτική συνάρτηση και $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ για κάθε $z \in U$.*

Ισχύει και η ακόλουθη παραλλαγή.

Θεώρημα 5.4. *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, $V \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο, $f : I \to V$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και $g : V \to \mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση. Τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη και $(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t)$ για κάθε $t \in I$.*

Θεώρημα 5.5. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική τέτοια ώστε $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in U$. Τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $z_0 \in U$ και έστω $z \in U$ τυχόν. Αφού το U είναι συνεκτικό, υπάρχει μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \to U$ με αρχή το z_0 και τέλος το z, δηλαδή $\gamma(a) = z_0$ και $\gamma(b) = z$. θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{C}$ με τύπο $h(t) = f(\gamma(t))$. Από τον κανόνα τής αλυσίδας έχουμε $h'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$ για κάθε t. Άρα οι παράγωγοι τού πραγματικού και τού φανταστικού μέρους τής h, οι οποίες είναι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, είναι μηδέν. Επομένως οι $\mathfrak{Re}\, h$ και $\mathfrak{Im}\, h$ είναι σταθερές, άρα η h είναι σταθερή. Ιδιαίτερα, $h(a) = h(b)$. Αλλά $h(a) = f(z_0)$ και $h(b) = f(z)$. Συνεπώς $f(z) = f(z_0)$ για κάθε $z \in U$, δηλαδή η f είναι σταθερή. □

Παρατήρηση. Στο προηγούμενο θεώρημα, η υπόθεση τής συνεκτικότητας είναι απαραίτητη. Για παράδειγμα αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στον δίσκο με κέντρο 0 και ακτίνα 1, και στο δίσκο με κέντρο 5 και ακτίνα 1, και παίρνει την τιμή 8 σε κάθε σημείο τού ενός δίσκου και την τιμή 32 σε κάθε σημείο τού άλλου, τότε $f' = 0$, αλλά, φυσικά η f δεν είναι σταθερή. Το θεώρημα αποτυγχάνει διότι το πεδίο ορισμού της f, δηλαδή το $D(0, 1) \cup D(5, 1)$, είναι σπασμένο σε δυο κομμάτια και έτσι δεν είναι συνεκτικό. Σε κάθε κομμάτι η συνάρτηση είναι σταθερή (με διαφορετικές τιμές), άρα έχει παράγωγο μηδέν. Σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού, δηλαδή στην ένωση των δυο κομματιών, δεν είναι σταθερή.

Οι συνθήκες Cauchy-Riemann

Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρίζει τις αναλυτικές συναρτήσεις μέσω τού πραγματικού και φανταστικού τους μέρους, και είναι το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα τού μαθήματος.

Θεώρημα 5.6 (Οι συνθήκες **Cauchy-Riemann**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$. Θέτουμε $u = \Re\mathrm{e}\, f$ και $v = \Im\mathrm{m}\, f$. Αν η f είναι αναλυτική, τότε οι μερικές παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y υπάρχουν και ισχύει*

$$f'(x_0 + iy_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0),$$

για κάθε $x_0 + iy_0 \in U$. Κατά συνέπεια $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Οι δύο αυτές εξισώσεις ονομάζονται συνθήκες Cauchy-Riemann. Αντίστροφα, αν οι μερικές παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y υπάρχουν, είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann, τότε η f είναι αναλυτική.

Απόδειξη. Έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Θα υπολογίσουμε το όριο που ορίζει την $f'(z_0)$ με δυο τρόπους: κατά μήκος τού πραγματικού άξονα και κατά μήκος τού φανταστικού άξονα. Έχουμε λοιπόν απ' τη μια

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) + iv(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Απ' την άλλη

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}} \frac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h) + iv(x_0, y_0+h) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0, y_0+h) - v(x_0, y_0)}{h} - i \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h) - u(x_0, y_0)}{h} \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Για το αντίστροφο, έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z_0, \varepsilon) \subset U$. Για κάθε $h = s + it$ στο $D(0, \varepsilon)$, θεωρούμε την ποσότητα

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{(u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0, y_0)) + i(v(x_0+s, y_0+t) - v(x_0, y_0))}{s+it}.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχουν s_1, t_1 με $|s_1| < |s|$ και $|t_1| < |t|$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0, y_0) \\ &= [u_x(x_0+s_1, y_0+t) - u_x(x_0, y_0)]s + [u_y(x_0, y_0+t_1) - u_y(x_0, y_0)]t + u_x(x_0, y_0)s + u_y(x_0, y_0)t \\ &= \phi(s,t) + u_x(x_0, y_0)s + u_y(x_0, y_0)t, \end{aligned}$$

όπου $\phi(s,t) = u_x(x_0+s_1, y_0+t) - u_x(x_0, y_0)]s + [u_y(x_0, y_0+t_1) - u_y(x_0, y_0)]t$. Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{s+it\to 0} \frac{\phi(s,t)}{s+it} = 0,$$

διότι u_x, u_y συνεχείς. Ομοίως

$$v(x_0+s, y_0+t) - v(x_0, y_0) = \psi(s,t) + v_x(x_0,y_0)s + v_y(x_0,y_0)t,$$

όπου

$$\lim_{s+it\to 0} \frac{\psi(s,t)}{s+it} = 0.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Cauchy-Riemann, έχουμε

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) + \frac{\phi(s,t)+i\psi(s,t)}{s+it}.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $s+it \to 0$, βλέπουμε ότι η f είναι αναλυτική. □

Παρατήρηση. Θα δούμε παρακάτω ότι η παράγωγος μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι και αυτή αναλυτική, επομένως στο ευθύ τού προηγούμενου θεωρήματος έχουμε στην πραγματικότητα ότι οι u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς. Έτσι το θεώρημα είναι όντως ένας χαρακτηρισμός των αναλυτικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.7. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο και $f : U \to \mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση.*

(1) *Αν το μέτρο τής f είναι σταθερό, τότε η f είναι σταθερή.*
(2) *Αν το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος τής f είναι σταθερό, τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Γράφουμε $f = u + iv$.

(1) Αφού υποθέσαμε ότι η f έχει σταθερό μέτρο, έχουμε ότι $u^2+v^2 = |f|^2 = c$, όπου c μη μηδενική σταθερά (αν το c είναι μηδέν, τότε $f=0$ και τελειώσαμε). Παραγωγίζοντας ως προς x και y παίρνουμε για κάθε σημείο στο U

$$\left\{\begin{array}{l} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow u\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αλλά οι u και v δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, διότι $u^2+v^2 \neq 0$. Έτσι η προηγούμενη σχέση μας λέει ότι τα διανύσματα (u_x, u_y) και (v_x, v_y) είναι γραμμικά εξαρτημένα. Συνεπώς

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = 0.$$

Από τις συνθήκες Cauchy-Riemann, $u_y = -v_x$ και $v_y = -u_x$. Άρα

$$\begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = 0,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $u_x^2 + v_x^2 = 0$, επομένως $u_x = v_x = 0$, συνεπώς $f' = u_x + iv_x = 0$. Αφού το U είναι συνεκτικό συμπεραίνουμε από το θεώρημα 5.5 ότι η f είναι σταθερή.

(2) Ας υποθέσουμε ότι το φανταστικό μέρος τής f είναι σταθερό. Τότε $v_x = v_y = 0$, επομένως από τις συνθήκες Cauchy-Riemann, $u_x = u_y = 0$, άρα $f' = 0$, συνεπώς η f είναι σταθερή. Με τελείως ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε αν το πραγαμτικό μέρος τής f είναι σταθερό.

□

Παραδείγματα.

- Ας ξαναδούμε ότι η $f(z) = \bar{z}$ δεν είναι αναλυτική χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Cauchy-Riemann. Έχουμε $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, όπου $u(x,y) = x$ και $v(x,y) = -y$. Τότε $u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = -1$. Βλέπουμε ότι $u_x \neq v_y$, άρα οι συνθήκες Cauchy-Riemann δεν ικανοποιούνται (μάλιστα σε κανένα σημείο). Επομένως η f δεν είναι αναλυτική. Παρατηρήστε ότι αν θεωρήσουμε την f σαν συνάρτηση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή $f(x, y) = (x, -y)$, τότε **είναι διαφορίσιμη** με την έννοια τού Απειροστικού Λογισμού II, γιατί οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς. Απ' την άλλη δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι αν θεωρήσει μια αναλυτική συνάρτηση σαν συναρτήση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$, τότε είναι διαφορίσιμη (πάλι με την έννοια τού Απειροστικού Λογισμού II). Έτσι η αναλυτικότητα είναι **ισχυρότερη** από την διαφορισιμότητα.

- Η συνάρτηση $f(z) = |z|^2$ δεν είναι αναλυτική. Αν ήταν, τότε από το προηγούμενο θεώρημα θα έπρεπε να ήταν σταθερή αφού το φανταστικό της μέρος είναι μηδέν. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, αν την θεωρήσουμε σαν πραγματική συνάρτηση δυο πραγματικών μεταβλητών, τότε είναι διαφορίσιμη.
- Η εκθετική συνάρτηση είναι αναλυτική. Πράγματι, από τον ορισμό τής εκθετικής,
$$e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y = u(x, y) + iv(x, y).$$
Έτσι σε κάθε $x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, έχουμε
$$u_x(x_0, y_0) = e^{x_0} \cos y_0,\ u_y(x_0, y_0) = -e^{x_0} \sin y_0,$$
$$v_x(x_0, y_0) = e^{x_0} \sin y_0,\ v_y(x_0, y_0) = e^{x_0} \cos y_0.$$
Επομένως οι u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις συνθήκες των Cauchy και Riemann. Άρα η e^z είναι αναλυτική. Η παράγωγός της, από το θεώρημα 5.6, είναι $u_x + iv_x = u + iv$. Δηλαδή, όπως και στην περίπτωση τής πραγματικής εκθετικής συνάρτησης τού Απειροστικού Λογισμού, έχουμε ότι $(e^z)' = e^z$.
- Η συνάρτηση e^{it}, $t \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και $(e^{it})' = ie^{it}$. Αυτό φυσικά προκύπτει από τον όρισμό της (τύπος τού Euler), δηλαδή $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Μπορούμε όμως να το δούμε και σαν συνέπεια τής αναλυτικότητας τής e^z και τού θεωρήματος 5.4.
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι αναλυτικές γιατί η e^z είναι αναλυτική και
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$
Είναι δηλαδή συνδυασμοί αναλυτικών συναρτήσεων (θεωρήματα 5.2 και 5.3). Επίσης
$$\sin' z = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$
και
$$\cos' z = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$
- Η συνάρτηση Log ορίζεται στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και έχει τύπο $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \arg z$. Έχουμε δει ότι δεν είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, επομένως αποκλείεται να είναι αναλυτική. Αλλά έχουμε επίσης δει ότι είναι συνεχής αν περιοριστεί στο ανοιχτό σύνολο $A = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Θα δείξουμε ότι στο A είναι αναλυτική. Θέτουμε $f(z) = \operatorname{Log} z$ και $g(z) = e^z$. Τότε $g(f(z)) = z$ για κάθε $z \in A$. Σταθεροποιούμε $z_0 \in A$. Τότε για κάθε $z \in A$ με $z \neq z_0$ έχουμε
$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}} = \frac{1}{\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)}}.$$
Παρατηρήστε ότι ο παρονομαστής στον παρονομαστή δεν μηδενίζεται διότι $z \neq z_0$ και η f είναι 1-1. Αν τώρα στείλουμε το z στο z_0, το $f(z)$ τείνει στο $f(z_0)$ γιατί η f είναι συνεχής στο A. Επομένως
$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{w \to f(z_0)} \frac{g(w) - g(f(z_0))}{w - f(z_0)} = g'(f(z_0)) = g(f(z_0)) = z_0.$$

Συμπεραίνουμε ότι
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z_0}.$$
Συνεπώς ο λογάριθμος είναι αναλυτικός στο A και $\operatorname{Log}' z = \frac{1}{z}$. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος τού λογαρίθμου ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann. Αυτό όμως θα είχε αρκετά περισσότερες πράξεις.

- Έχουμε δει ότι αν $a \in \mathbb{C}$ τότε για κάθε $z \neq 0$, η μιγαδική δύναμη z^a ορίζεται να είναι $e^{a \operatorname{Log} z}$. Έτσι, από το προηγούμενο παράδειγμα, η z^a είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Από τον κανόνα τής αλυσίδας, η παράγωγος της είναι

$$(z^a)' = \left(e^{a \operatorname{Log} z}\right)' = (a \operatorname{Log} z)' e^{a \operatorname{Log} z} = a\frac{1}{z} e^{a \operatorname{Log} z} = a e^{-\operatorname{Log} z} e^{a \operatorname{Log} z} = a e^{(a-1)\operatorname{Log} z} = a z^{a-1}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Μιγαδικά Ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \Re\mathrm{e}\, f(t)\,dt + i \int_a^b \Im\mathrm{m}\, f(t)\,dt.$$

Για παράδειγμα, αν $f(t) = \sin t + it$, $t \in [0, 2\pi]$, τότε

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin t\,dt + i \int_0^{2\pi} t\,dt = i2\pi^2.$$

Ολοκληρώματα αυτού τού είδους αποτελούν άμεση γενίκευση του συνηθισμένου ολοκληρώματος τού Απειροστικού Λογισμού, και έχουν τελείως ανάλογες ιδιότητες.

Θεώρημα 6.1. *Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ συνεχείς και $z \in \mathbb{C}$, τότε*

(1) $\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$

(2) $\displaystyle\int_a^b z f(t)\,dt = z \int_a^b f(t)\,dt.$

Απόδειξη.

(1) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(t) + g(t)\,dt &= \int_a^b \Re\mathrm{e}\,(f(t) + g(t))\,dt + i \int_a^b \Im\mathrm{m}\,(f(t) + g(t))\,dt \\
&= \int_a^b \Re\mathrm{e}\, f(t)\,dt + \int_a^b \Re\mathrm{e}\, g(t)\,dt + i \int_a^b \Im\mathrm{m}\, f(t)\,dt + i \int_a^b \Im\mathrm{m}\, g(t)\,dt \\
&= \int_a^b \Re\mathrm{e}\, f(t)\,dt + i \int_a^b \Im\mathrm{m}\, f(t)\,dt + \int_a^b \Re\mathrm{e}\, g(t)\,dt + i \int_a^b \Im\mathrm{m}\, g(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.
\end{aligned}$$

(2) Γράφουμε $f(t) = u(t) + iv(t)$ και $z = x + iy$. Τότε $\Re\mathrm{e}\,(zf(t)) = xu(t) - yv(t)$ και $\Im\mathrm{m}\,(zf(t)) = xv(t) + yu(t)$, άρα

$$\begin{aligned}
\int_a^b z f(t)\,dt &= \int_a^b (xu(t) - yv(t))\,dt + i \int_a^b (xv(t) + yu(t))\,dt \\
&= (x + iy)\left(\int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt\right) = z \int_a^b f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 6.2. *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και υπάρχει παραγωγίσιμη $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $g' = f$ τότε*

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a) = [g(t)]_a^b.$$

Απόδειξη. Προκύπτει από το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b g'(t)\, dt &= \int_a^b (\Re\mathrm{e}\, g)'(t)\, dt + i \int_a^b (\Im\mathrm{m}\, g)'(t)\, dt \\ &= \Re\mathrm{e}\, g(b) - \Re\mathrm{e}\, g(a) + i(\Im\mathrm{m}\, g(b) - \Im\mathrm{m}\, g(a)) \\ &= \Re\mathrm{e}\, g(b) + i\,\Im\mathrm{m}\, g(b) - (\Re\mathrm{e}\, g(a) + i\,\Im\mathrm{m}\, g(a)) = g(b) - g(a).\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 6.3 (Τριγωνική ανισότητα)**.** *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, τότε*

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $w = \int_a^b f(t)\, dt$ και γράφουμε $w = |w| e^{i\theta}$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = |w| = e^{-i\theta} w = e^{-i\theta} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\, dt.$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι πραγματικός αριθμός, άρα είναι ίση με το πραγματικό της μέρος. Επομένως

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = \Re\mathrm{e} \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\, dt = \int_a^b \Re\mathrm{e}\, (e^{-i\theta} f(t))\, dt \le \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)|\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

□

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ μια καμπύλη και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση, δηλαδή μια συνάρτηση συνεχής πάνω στην τροχιά τής καμπύλης. Ορίζουμε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Το σύμβολο $\int_\gamma f(z)\,dz$ διαβάζεται "**(επικαμπύλιο) ολοκλήρωμα τής f πάνω στην γ**" ή "**(επικαμπύλιο) ολοκλήρωμα τής f κατά μήκος τής γ**". Αν το γ είναι ένα μονοπάτι που αποτελείται από τις διαδοχικές καμπύλες $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, τότε ορίζουμε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

Παράδειγμα. Έστω $f(z) = z$, $g(z) = \frac{1}{z}$, $h(z) = \frac{1}{z^2}$, και $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, η καμπύλη με τροχιά τον μοναδιαίο κύκλο. Τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα 6.2 παίρνουμε

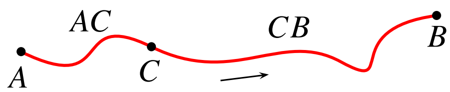
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} ie^{it}e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt = \frac{1}{2}[e^{2it}]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_0^{2\pi} ie^{-it}e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$$\int_\gamma h(z)\,dz = \int_0^{2\pi} ie^{-2it}e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{-it}\,dt = -[e^{-it}]_0^{2\pi} = 0$$

Παρατηρήσεις.

- Έχουμε πει ότι συχνά δεν διακρίνουμε ένα μονοπάτι από την τροχιά του. Έτσι μπορούμε, για παράδειγμα, να μιλάμε για το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πάνω στον κύκλο $C(z_0, r)$ και να γράφουμε $\int_{C(z_0,r)} f(z)\,dz$, εννοώντας $\int_\gamma f(z)\,dz$, όπου $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
- Αν γ είναι ένα μονοπάτι με αρχή το σημείο A και τέλος το σημείο B, και επιλέξουμε ένα σημείο C πάνω στο γ, τότε αυτό χωρίζεται σε δυο διαδοχικά μονοπάτια AC και CB. Το πρώτο έχει αρχή A και τέλος C, το δεύτερο έχει αρχή C και τέλος B.



Αποδεικνύεται ότι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{AC} f(z)\,dz + \int_{CB} f(z)\,dz,$$

για κάθε f συνεχή στο γ.

Θεώρημα 6.4. *Έστω γ ένα μονοπάτι, $f, g : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε*

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\,dz = \lambda\int_\gamma f(z)\,dz + \mu\int_\gamma g(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 6.1. □

Θεώρημα 6.5. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ μια καμπύλη, γ^- η αντίθετή της, και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε*
$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$
Δηλαδή αν διαγράψουμε την καμπύλη με αντίθετη φορά, το πρόσημο τού ολοκληρώματος αλλάζει.

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει και για μονοπάτια.

Απόδειξη. Από τον ορισμό τής αντίθετης έχουμε
$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)\,dt = -\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$
□

Αν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι μια καμπύλη τότε το **μήκος** της ορίζεται να είναι
$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$
Αν γ είναι ένα μονοπάτι που αποτελείται από τις διαδοχικές καμπύλες $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ τότε το μήκος του ορίζεται να είναι
$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \cdots + \ell(\gamma_n).$$

Παραδείγματα.

- Έστω $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, η καμπύλη με τροχιά τον κύκλο $C(z_0, r)$. Τότε
$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt = r\int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$
- Έστω $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, $t \in [0,1]$, η καμπύλη με τροχιά το ευθύγραμμο τμήμα $[z_1, z_2]$. Τότε
$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt = |z_2 - z_1|\int_0^1 dt = |z_2 - z_1|.$$

Θεώρημα 6.6. *Έστω γ ένα μονοπάτι και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*
$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \ell(\gamma)\max_{z\in\gamma^*}|f(z)|.$$
(Το max *υπάρχει από το θεώρημα 3.16.)*

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη στην ειδική περίπτωση όπου $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι καμπύλη. Η γενική περίπτωση που το γ είναι μονοπάτι προκύπτει από την ειδική. Έχουμε
$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|\,dt \le \max_{t\in[a,b]}|f(\gamma(t))|\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \\ &= \max_{z\in\gamma^*}|f(z)|\ell(\gamma).\end{aligned}$$
Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό τού μήκους και τον ορισμό τής τροχιάς, δηλαδή
$$\gamma^* = \gamma([a,b]) = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}.$$

□

Θεώρημα 6.7. *Έστω γ ένα μονοπάτι και $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων τέτοια ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Τότε*

$$\int_\gamma f_n(z)\, dz \to \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα 6.6 έχουμε

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz \right| \le \ell(\gamma) \max_{z\in\gamma^*} |f_n(z) - f(z)| \to 0.$$

□

Παρατήρηση. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει ομοιόμορφα, επομένως από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει άμεσα ότι

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz.$$

Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : U \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Μια αναλυτική συνάρτηση $F : U \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $F' = f$ (αν υπάρχει) λέγεται **παράγουσα** τής f. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι το ανάλογο τού 2ου Θεμελιώδους Θεωρήματος τού Απειροστικού Λογισμού στην Μιγαδική Ανάλυση.

Θεώρημα 6.8. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής και γ ένα μονοπάτι στο U με αρχή το σημείο z_1 και τέλος το σημείο z_2. Αν η f έχει παράγουσα F τότε*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Απόδειξη. Για απλότητα υποθέτουμε ότι το γ είναι καμπύλη με πεδίο ορισμού το $[a, b]$. Τότε από τα θεωρήματα 5.4 και 6.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\, dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt \\ &= (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

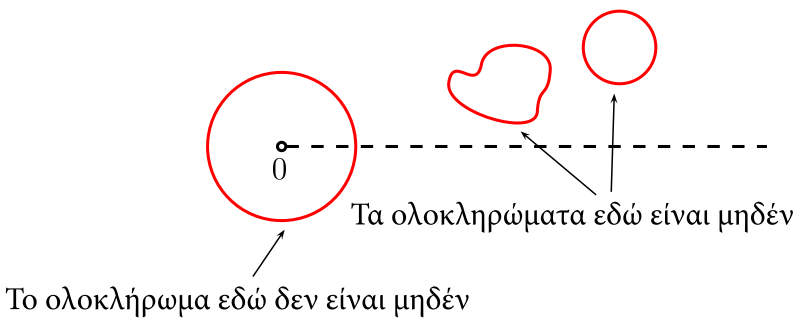
□

Παρατηρήσεις.

- Το προηγούμενο θεώρημα λέει ότι **αν η f έχει παράγουσα** τότε το ολοκλήρωμα πάνω σε οποιοδήποτε μονοπάτι που συνδέει δυο δεδομένα σημεία δεν εξαρτάται από το μονοπάτι, αλλά είναι πάντα ίσο με την διαφορά των τιμών τής παράγουσας στα άκρα. Ιδιαίτερα, το ολοκλήρωμα πάνω σε κάθε κλειστό μονοπάτι είναι μηδέν. Έτσι αν το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης σε κάποιο κλειστό μονοπάτι δεν είναι μηδέν, τότε η συνάρτηση δεν έχει παράγουσα.
- Θα δούμε παρακάτω ότι η παράγωγος μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι και αυτή αναλυτική. Επομένως μια f όπως στο θεώρημα είναι αυτομάτως αναλυτική.

Παραδείγματα.

- Αν n είναι φυσικός αριθμός, τότε η συνάρτηση $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ είναι παράγουσα τής z^n σ' ολόκληρο το $\mathbb{C}$, άρα αν γ είναι οποιοδήποτε μονοπάτι με αρχή z_1 και τέλος z_2, τότε
$$\int_\gamma z^n\,dz = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}.$$
- Η $-\frac{1}{z}$ είναι παράγουσα τής $\frac{1}{z^2}$, άρα $\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ η που δεν περνάει από το μηδέν. Το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε συνάρτηση τής μορφής $\frac{1}{z^n}$, όπου $n > 1$ φυσικός. Τι γίνεται αν $n = 1$; Είδαμε με απ' ευθείας υπολογισμό ότι αν γ είναι ο μοναδιαίος κύκλος, τότε $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$. Επομένως η $\frac{1}{z}$ δεν έχει παράγουσα. Αυτό εκ πρώτης όψεως φαίνεται παράλογο αφού στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι $\operatorname{Log}'z = \frac{1}{z}$, δηλαδή ο λογάριθμος είναι παράγουσα τής $\frac{1}{z}$! Δεν υπάρχει άτοπο. Η σχέση $\operatorname{Log}'z = \frac{1}{z}$ δεν ισχύει σ΄ολόκληρο το πεδίο ορισμού τής $\frac{1}{z}$, αλλά μόνο εκεί που ο λογάριθμος είναι αναλυτική συνάρτηση, δηλαδή στο σύνολο $A = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Ο μοναδιαίος κύκλος δεν περιέχεται στο A, αφού τέμνει το $[0, +\infty)$, επομένως το θεώρημα 6.8 δεν εφαρμόζεται. Αν ολοκληρώσουμε πάνω σε ένα κύκλο (ή οποιοδήποτε άλλο κλειστό μονοπάτι) ο οποίος βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο A, τότε θα πάρουμε μηδέν.



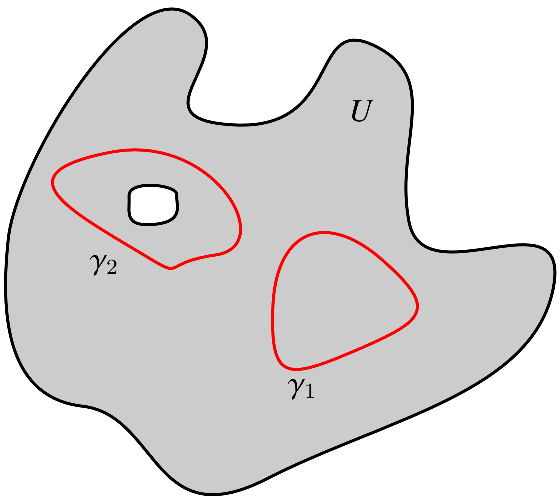
Το θεώρημα τού Cauchy

Το επόμενο θεώρημα έχει θεμελιώδη σημασία στη Μιγαδική Ανάλυση.

Θεώρημα 6.9 (Cauchy). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\gamma : [a,b] \to U$ μια κλειστή καμπύλη στο U τέτοια ώστε το εσωτερικό της είναι υποσύνολο τού U. Τότε για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ έχουμε*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Στο σχήμα παρακάτω το εσωτερικό τής καμπύλης γ_1 περιέχεται στο U, άρα $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$. Το εσωτερικό τής καμπύλης γ_2, λόγω τής τρύπας που έχει το U, δεν περιέχεται στο U. Έτσι το θεώρημα δεν μας λέει τίποτα για το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.



Απόδειξη. Κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι οι μερικές παράγωγοι τού πραγματικού και τού φανταστικού μέρους τής f είναι συνεχείς. Η υπόθεση αυτή είναι περιττή γιατί όπως θα δούμε αργότερα η παράγωγος μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι και αυτή αναλυτική. Για να το δείξουμε όμως αυτό χρειαζόμαστε το θεώρημα τού Cauchy! Έτσι η απόδειξη που δίνουμε εδώ είναι στην πραγματικότητα "απάτη". Η "νόμιμη" απόδειξη ξεφεύγει από τα πλαίσια τού μαθήματος. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η γ είναι θετικά προσανατολισμένη. Γράφουμε $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ και έστω A το εσωτερικό τής γ. Ταυτίζοντας μιγαδικούς αριθμούς με σημεία στο $\mathbb{R}^2$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η γ είναι η καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ στο $\mathbb{R}^2$ και ότι $A \subset \mathbb{R}^2$. Έστω τώρα ότι $f = u + iv$. Θεωρούμε τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{F} = (u, -v)$ και $\mathbf{G} = (v, u)$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b [u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))][x'(t) + iy'(t)]\,dt \\ &= \int_a^b [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]\,dt \\ &+ i\int_a^b [v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]\,dt\end{aligned}$$

$$= \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt + i \int_a^b \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt = \int\limits_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + i \int\limits_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

Αφού οι u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς, από το θεώρημα Green έχουμε

$$\int\limits_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint\limits_A (-v_x - u_y)\, dxdy, \quad \int\limits_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = \iint\limits_A (u_x - v_y)\, dxdy.$$

Αλλά από τις συνθήκες Cauchy-Riemann, $u_y = -v_x$ και $u_x = v_y$, και το συμπέρασμα έπεται. □

Παρατηρήσεις.

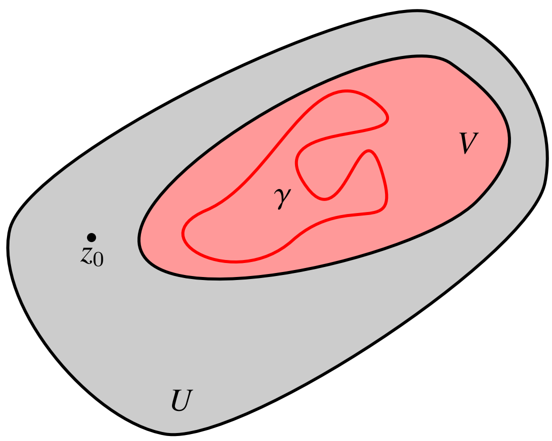
- Το θεώρημα τού Cauchy ισχύει και στην περίπτωση που έχουμε ένα κλειστό μονοπάτι.
- Προσέξτε τη διαφορά ανάμεσα στο θεώρημα τού Cauchy και το θεώρημα 6.8 τής προηγούμενης ενότητας. Το πρώτο λέει ότι αν το εσωτερικό τού μονοπατιού περιέχεται στο U τότε το ολοκλήρωμα **κάθε αναλυτικής συνάρτησης** είναι μηδέν. Το δεύτερο λέει ότι αν η συνάρτηση έχει παράγουσα τότε το ολοκλήρωμα πάνω σε **κάθε κλειστό μονοπάτι** είναι μηδέν. Το θεώρημα τού Cauchy είναι "σημαντικότερο" γιατί είναι προφανώς ευκολότερο να ελέγξουμε αν το εσωτερικό ενός μονοπατιού βρίσκεται σε κάποιο σύνολο, από το να ελέγξουμε αν μια συνάρτηση έχει παράγουσα.
- Αν το U δεν έχει τρύπες, τότε το εσωτερικό κάθε κλειστού μονοπατιού στο U περιέχεται στο U, επομένως το ολοκλήρωμα κάθε αναλυτικής συνάρτησης στο U πάνω σε κάθε κλειστό μονοπάτι στο U είναι μηδέν.

Θα χρειαστούμε αργότερα την ακόλουθη παραλλαγή τού θεωρήματος τού Cauchy.

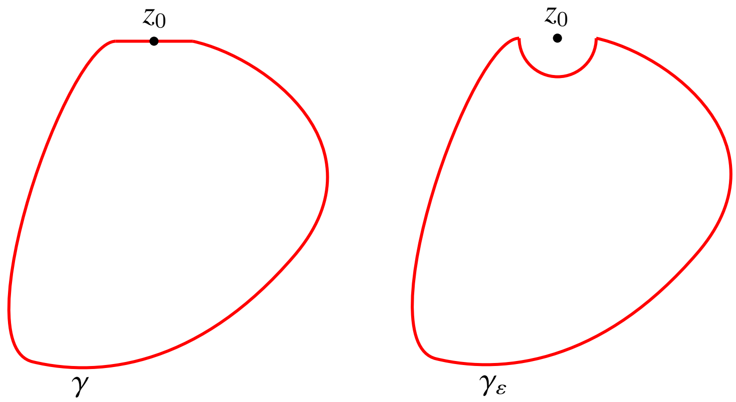
Θεώρημα 6.10. *Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο, z_0 ένα σημείο στο U και f μια συνάρτηση στο U η οποία είναι αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$ και συνεχής στο z_0. Αν γ είναι ένα κλειστό μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε το εσωτερικό του περιέχεται στο U, τότε $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις όσον αφορά τη θέση τού σημείου σε σχέση με το μονοπάτι.

1η περίπτωση. Το z_0 είναι στο εξωτερικό τού γ. Τότε επιλέγουμε ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset U$ έτσι ώστε το z_0 να μην ανήκει στο V και το μονοπάτι μαζί με το εσωτερικό του να περιέχονται στο V. Τότε η f είναι αναλυτική στο V, άρα από το θεώρημα τού Cauchy, $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.



2η περίπτωση. Το z_0 ανήκει στο γ. Τότε αντικαθιστούμε ένα μικρό τμήμα τού γ γύρω από το z_0 από ένα ημικύκλιο με κέντρο z_0 και ακτίνα ε όπως στο σχήμα, και παίρνουμε ένα κλειστό μονοπάτι γ_ε.

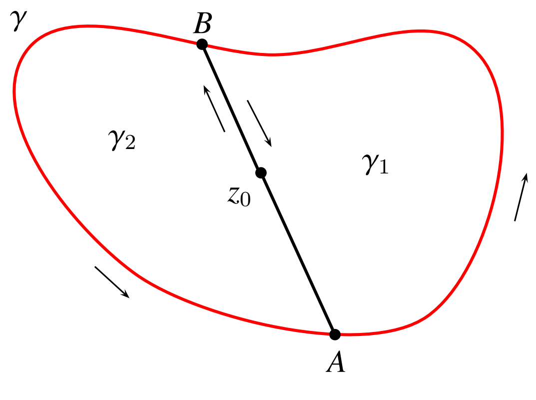


Το z_0 είναι τώρα στο εξωτερικό τού γ_ε, άρα, από την 1η περίπτωση, $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$. Αποδεικνύεται* ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Αυτό είναι διαισθητικά προφανές. Καθώς $\varepsilon \to 0$, το μήκος τού ημικυκλίου τείνει στο μηδέν, και έτσι το γ_ε τείνει να ταυτιστεί με το γ. Τότε όμως και το ολοκλήρωμα πάνω στο γ_ε τείνει να γίνει ίσο με το ολοκλήρωμα πάνω στο γ. Αλλά το ολοκλήρωμα πάνω στο γ_ε είναι μηδέν, άρα $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

3η περίπτωση. Το z_0 είναι στο εσωτερικό τού γ. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το γ είναι θετικά προσανατολισμένο. Επιλέγουμε δυο σημεία A, B πάνω στο γ με τέτοιο τρόπο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει να περνάει από το z_0 και να βρίσκεται στο εσωτερικό τού γ (εκτός φυσικά από τα άκρα που είναι πάνω στο μονοπάτι). Έτσι το γ χωρίζεται σε δυο μονοπάτια AB (με αρχή A και τέλος B, διαγραφόμενο αριστερόστροφα) και BA (που συνδέει το B πίσω με το A με την ίδια φορά) τα οποία μαζί με τα ευθύγραμμα τμήματα δημιουργούν δύο κλειστά μονοπάτια γ_1 και γ_2 το εσωτερικό των οποίων περιέχεται στο εσωτερικό τού γ.



Το γ_1 αποτελείται από AB και το ευθύγραμμο τμήμα $[B, A]$. Το γ_2 αποτελείται από το BA και το ευθύγραμμο τμήμα $[A, B]$. Το z_0 ανήκει και στα δυο μονοπάτια, άρα, από τη 2η περίπτωση, έχουμε

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

*Δείτε το συμπλήρωμα στο τέλος αυτής τής ενότητας

Παρατηρούμε ότι

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{AB} f(z)\,dz + \int\limits_{[B,A]} f(z)\,dz, \qquad \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{BA} f(z)\,dz + \int\limits_{[A,B]} f(z)\,dz$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$0 = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = \left(\int\limits_{AB} f(z)\,dz + \int\limits_{BA} f(z) \right) + \left(\int\limits_{[A,B]} f(z)\,dz + \int\limits_{[B,A]} f(z)\,dz \right).$$

Το άθροισμα των δυο ολοκληρωμάτων στην πρώτη παρένθεση είναι ίσο με $\int_\gamma f(z)\,dz$ αφού το γ αποτελείται από τα AB, BA. Το άθροισμα των δυο ολοκληρωμάτων στη δεύτερη παρένθεση είναι ίσο με μηδέν διότι τα $[A,B]$ και $[B,A]$ διαγράφονται με αντίθετες φορές. Συμπεραίνουμε ότι $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. □

Παρατήρηση. Το θεώρημα 6.10 είναι εκ πρώτης όψεως ισχυρότερο από το θεώρημα τού Cauchy αφού η υπόθεση είναι φαινομενικά ασθενέστερη και το συμπέρασμα το ίδιο. Θα δείξουμε αργότερα ότι μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί αυτή την υπόθεση είναι αναλυτική σ᾽ολόκληρο το U, επομένως τα δυο θεωρήματα είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμα.

Συμπλήρωμα. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό που κάναμε στην απόδειξη τού θεωρήματος 6.10, δηλαδή

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Ας θέσουμε s_ε να είναι το ημικύκλιο, και δ_ε να είναι το κομμάτι του μονοπατιού που αντικαταστήσαμε. Τότε

$$\left| \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz \right| = \left| \int\limits_{\delta_\varepsilon} f(z)\,dz - \int\limits_{s_\varepsilon} f(z)\,dz \right|.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 6.6 παίρνουμε ότι η παραπάνω ποσότητα είναι μικρότερη από

$$\begin{aligned} &\ell(\delta_\varepsilon)\max\{|f(z)| : z \in \delta_\varepsilon^*\} + \ell(s_\varepsilon)\max\{|f(z)| : z \in s_\varepsilon^*\} \\ (*) \qquad &\leq \ell(\delta_\varepsilon)\max\{|f(z)| : z \in \gamma^*\} + \ell(s_\varepsilon)|f(z_\varepsilon)|, \end{aligned}$$

για κάποιο z_ε πάνω στο ημικύκλιο. Καθώς το ε τείνει στο μηδέν, το μήκος του δ_ε και το μήκος τού ημικυκλίου τείνουν στο μηδέν. Επίσης, το z_ε τείνει στο z_0, άρα $|f(z_\varepsilon)| \to |f(z_0)|$ διότι η f είναι συνεχής. Συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα στην (*) τείνει στο μηδέν.

Ένα σημαντικό ολοκλήρωμα

Θα υπολογίσουμε το σημαντικότερο ολοκλήρωμα στη Μιγαδική Ανάλυση. Ο υπολογισμός τού ολοκληρώματος οποιασδήποτε αναλυτικής συνάρτησης πάνω σε οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι ανάγεται τελικά σε αυτό.

Θεώρημα 6.11. *Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, και ένα σημείο $z \notin C(z_0, r)$. Τότε*

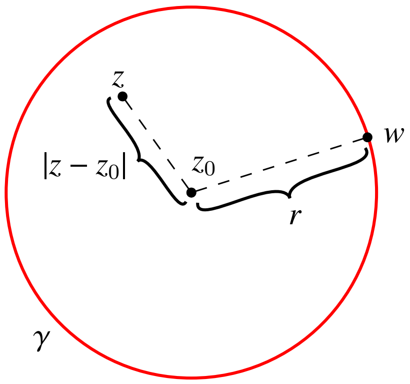
$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 0, & \text{αν το } z \text{ ανήκει στο εξωτερικό τού } C(z_0,r) \\ 2\pi i, & \text{αν το } z \text{ ανήκει στο εσωτερικό τού } C(z_0,r) \end{cases},$$

όπου $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, η συνηθισμένη καμπύλη που διαγράφει τον κύκλο $C(z_0, r)$ αριστερόστροφα.

Απόδειξη. Αν το z ανήκει στο εξωτερικό τού κύκλου, τότε το εσωτερικό τού κύκλου περιέχεται στο πεδίο ορισμού τής $f(w) = \frac{1}{w-z}$, επομένως, από το θεώρημα τού Cauchy έχουμε ότι $\int_\gamma f(w)\,dw = 0$. Έστω τώρα ότι το z ανήκει στο εσωτερικό τού κύκλου. Τότε για κάθε $w \in C(z_0, r)$ έχουμε

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}.$$

Αφού το z ανήκει στο εσωτερικό τού κύκλου έχουμε $|z - z_0| < r$. Αφού το w είναι πάνω στον κύκλο έχουμε $|w - z_0| = r$. Άρα $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$.



Επομένως, χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.1) για το άθροισμα γεωμετρικής σειράς με $\lambda = \frac{z-z_0}{w-z_0}$, παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}.$$

Συνεπώς

$$(*) \qquad \frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Παρατηρήστε ότι αν θέσουμε

$$f_n(w) = \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}, \qquad M_n = \frac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}}$$

τότε $|f_n(w)| = M_n$ για κάθε n και κάθε w στον κύκλο. Αλλά η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει από το κριτήριο λόγου, αφού

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

Επομένως, από το κριτήριο Weierstrass (θεώρημα 4.1), η σειρά συναρτήσεων στην εξίσωση (*) συγκλίνει ομοιόμορφα στον κύκλο. Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση μετά το θεώρημα 6.7 και ολοκληρώσουμε την εξίσωση (*) ως προς w πάνω στον κύκλο, παίρνουμε

$$\int_\gamma \frac{dw}{w - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\gamma \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - z_0)^n \int_\gamma \frac{dw}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Παρατηρήστε ότι στην παραπάνω σειρά, αν $n \neq 0$ τότε η συνάρτηση $\frac{-1}{n(w-z_0)^n}$ είναι παράγουσα τής $\frac{1}{(w-z_0)^{n+1}}$, άρα, από το θεώρημα 6.8, έχουμε ότι $\int_\gamma \frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} = 0$. Έτσι, μόνο ο όρος που αντιστοιχεί στο $n = 0$, δηλαδή ο πρώτος όρος τής σειράς, είναι μη μηδενικός. Αλλά ο όρος αυτός είναι ίσος με

$$\int_\gamma \frac{dw}{w - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt = 2\pi i.$$

□

Αν κανείς αναρωτηθεί γιατί να μην υπολογίσουμε απ᾿ ευθείας το

$$\int_\gamma \frac{dw}{w - z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it} + z_0 - z}\, dt,$$

δεν έχει παρά να δοκιμάσει...

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Εφαρμογές τού θεωρήματος τού Cauchy

Ο ολοκληρωτικός τύπος τού Cauchy

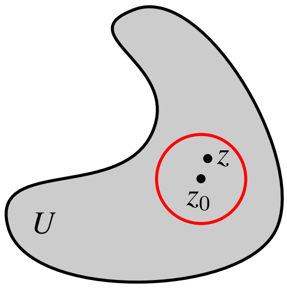
Θα δείξουμε ότι η τιμή μιας αναλυτικής συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο ενός δίσκου καθορίζεται από τις τιμές της στην περιφέρεια τού δίσκου.

Θεώρημα 7.1 (Ο ολοκληρωτικός τύπος τού Cauchy)**.** *Έστω f μια συνάρτηση αναλυτική σε κάποιο ανοιχτό σύνολο U. Τότε για κάθε $z \in U$ έχουμε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw,$$

όπου $C(z_0, r)$ είναι οποιοσδήποτε (θετικά προσανατολισμένος) κύκλος στο U τέτοιος ώστε:

- *Το z ανήκει στο εσωτερικό τού $C(z_0, r)$.*
- *Το εσωτερικό τού $C(z_0, r)$ περιέχεται στο U.*



Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $z \in D(z_0, r)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g : U \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{αν } w \neq z \\ \\ f'(z), & \text{αν } w = z \end{cases}.$$

Η g είναι προφανώς αναλυτική στο $U \setminus \{z\}$ ως πηλίκο αναλυτικών συναρτήσεων. Επίσης, είναι συνεχής στο z διότι

$$\lim_{w\to z} g(w) = \lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = f'(z) = g(z).$$

Επομένως, από το θεώρημα 6.10, έχουμε ότι

$$\int_{C(z_0,r)} g(w)\, dw = 0.$$

Αλλά

$$\int_{C(z_0,r)} g(w)\, dw = \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \int_{C(z_0,r)} \frac{dw}{w-z}.$$

Αφού το z είναι εσωτερικό σημείο τού κύκλου, το θεώρημα 6.11 λέει ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με $2\pi i$ και το συμπέρασμα έπεται. $\square$

Δείχνουμε τώρα ότι αν η f είναι αναλυτική τότε και η f' είναι αναλυτική, άρα έχει παραγώγους όλων των τάξεων. Οι τιμές τους δίνονται από έναν τύπο ανάλογο τού ολοκληρωτικού τύπου τού Cauchy.

Θεώρημα 7.2 (Ο ολοκληρωτικός τύπος τού Cauchy για παραγώγους)**.** *Έστω f μια συνάρτηση αναλυτική σε κάποιο ανοιχτό σύνολο U. Τότε για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, η n τάξης παράγωγος τής f υπάρχει, και για κάθε $z \in U$ έχουμε*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw,$$

όπου $C(z_0, r)$ είναι οποιοσδήποτε κύκλος στο U τέτοιος ώστε:

- *Το z ανήκει στο εσωτερικό τού $C(z_0, r)$.*
- *Το εσωτερικό τού $C(z_0, r)$ περιέχεται στο U.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο n. Για $n = 0$ έχουμε τον ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy τού προηγούμενου θεωρήματος. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιο n ισχύει αυτό που θέλουμε να δείξουμε. Σταθεροποιούμε τυχόν $z \in U$ και ένα κύκλο όπως στη διατύπωση τού θεωρήματος. Πρέπει να δείξουμε ότι η παράγωγος τής $f^{(n)}$ στο z υπάρχει και

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw.$$

Ισοδύναμα

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw.$$

Για κάθε h με αρκετά μικρό μέτρο ώστε το $z+h$ να είναι στο εσωτερικό τού κύκλου, έχουμε από την επαγωγική υπόθεση

$$\frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} f(w) \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(w-z-h)^{n+1}} - \frac{1}{(w-z)^{n+1}}\right) dw$$

Παρατηρούμε ότι το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(w-z-h)^{n+1}} - \frac{1}{(w-z)^{n+1}}\right)$$

είναι ίσο με την παράγωγο τής συνάρτησης $g(w) = -\frac{1}{(w-z)^{n+1}}$, από τον ορισμό τής παραγώγου. Αλλά $g'(w) = \frac{n+1}{(w-z)^{n+2}}$. Έτσι, αν στείλουμε το h στο 0, αυτό που είναι μέσα στο ολοκλήρωμα τείνει στο

$$f(w) \frac{n+1}{(w-z)^{n+2}}.$$

Τώρα, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο με το ολοκλήρωμα*. Επομένως

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} f(w) \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(w-z-h)^{n+1}} - \frac{1}{(w-z)^{n+1}}\right) dw$$

*Δείτε το συμπλήρωμα στο τέλος αυτής τής ενότητας

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} f(w) \frac{n+1}{(w-z)^{n+2}}\, dw \\
&= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw.
\end{aligned}
$$

□

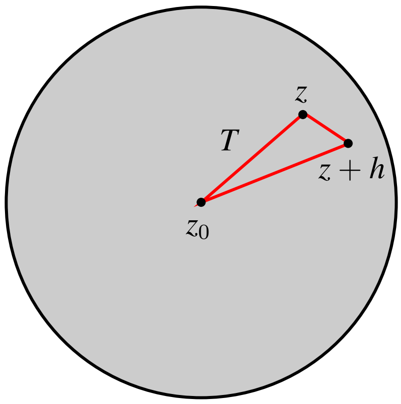
Παρατήρηση. Βλέπουμε αμέσως από το προηγούμενο θεώρημα ότι αν μια συνάρτηση έχει παράγουσα, τότε είναι αυτομάτως αναλυτική. Αυτό μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα που μπορεί να θεωρηθεί, κατά μια έννοια, το αντίστροφο τού θεωρήματος τού Cauchy.

Θεώρημα 7.3 (Το θεώρημα Morera)**.** *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε κάποιο ανοιχτό σύνολο U. Αν $\int_T f(z)\, dz = 0$ για κάθε τρίγωνο T τέτοιο ώστε το εσωτερικό τού T περιέχεται στο U, τότε η f είναι αναλυτική.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι αναλυτική στον τυχόντα ανοιχτό δίσκο $D(z_0, r) \subset U$. Από την προηγούμενη παρατήρηση, αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει παράγουσα στον $D(z_0, r)$. Ορίζουμε λοιπόν $F : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ με

$$F(z) = \int\limits_{[z_0,z]} f(w)\, dw.$$

Θα δείξουμε ότι $F' = f$. Σταθεροποιούμε $z \in D(z_0, r)$. Τότε για κάθε h με αρκετά μικρό μέτρο ώστε το $z + h$ να βρίσκεται στο δίσκο θεωρούμε το τρίγωνο T με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα $[z_0, z]$,$[z, z + h]$ και $[z + h, z_0]$.



Τότε

$$\int\limits_T f(z)\, dz = \int\limits_{[z_0,z]} f(z)\, dz + \int\limits_{[z,z+h]} f(z)\, dz + \int\limits_{[z+h,z_0]} f(z)\, dz.$$

Αλλά, από υπόθεση, $\int_T f(z)\, dz = 0$, άρα

$$\int\limits_{[z_0,z+h]} f(z)\, dz = -\int\limits_{[z+h,z_0]} f(z)\, dz = \int\limits_{[z_0,z]} f(z)\, dz + \int\limits_{[z,z+h]} f(z)\, dz.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int\limits_{[z_0,z+h]} f(w)\,dw - \int\limits_{[z_0,z]} f(w)\,dw \right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int\limits_{[z_0,z]} f(w)\,dw + \int\limits_{[z,z+h]} f(w)\,dw - \int\limits_{[z_0,z]} f(w)\,dw \right) \\
&= \frac{1}{h} \int\limits_{[z,z+h]} f(w)\,dw.
\end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\int\limits_{[z,z+h]} f(z)\,dw = f(z) \int\limits_{[z,z+h]} dw = f(z)(z+h-z) = hf(z).$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, το θεώρημα 6.6 και ότι το μήκος τού $[z, z+h]$ είναι $|h|$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int\limits_{[z,z+h]} f(w)\,dw - hf(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int\limits_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,dw \right| \\
&\le \frac{\ell([z,z+h])}{|h|} \max\{|f(w)-f(z)| : w \in [z,z+h]\} = |f(w_h)-f(z)|,
\end{aligned}$$

για κάποιο w_h πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[z, z+h]$. Καθώς το h τείνει στο μηδέν, το $z+h$ τείνει στο z, άρα και το w_h τείνει στο z.

Αφού η f είναι συνεχής, έχουμε ότι $f(w_h) \to f(z)$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z),$$

δηλαδή $F'(z) = f(z)$. □

Μπορούμε τώρα να απδείξουμε τον ισχυρισμό που κάναμε στην παρατήρηση μετά το θεώρημα 6.10.

Θεώρημα 7.4. *Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο, z_0 ένα σημείο τού U, και f μια συνάρτηση στο U η οποία είναι αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$ και συνεχής στο z_0. Τότε η f είναι αναλυτική.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το θεώρημα Morera και το θεώρημα 6.10. □

Δείχνουμε τέλος ότι στους ολοκληρωτικούς τύπους τού Cauchy μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον κύκλο από πιο γενικά κλειστά μονοπάτια.

Θεώρημα 7.5 (Ο γενικός ολοκληρωτικός τύπος τού Cauchy)**.** *Έστω ένα ανοιχτό σύνολο U, μια αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, και γ ένα* **θετικά** *προσανατολισμένο κλειστό μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε το εσωτερικό του περιέχεται στο U. Τότε για κάθε z στο εσωτερικό τού γ έχουμε*

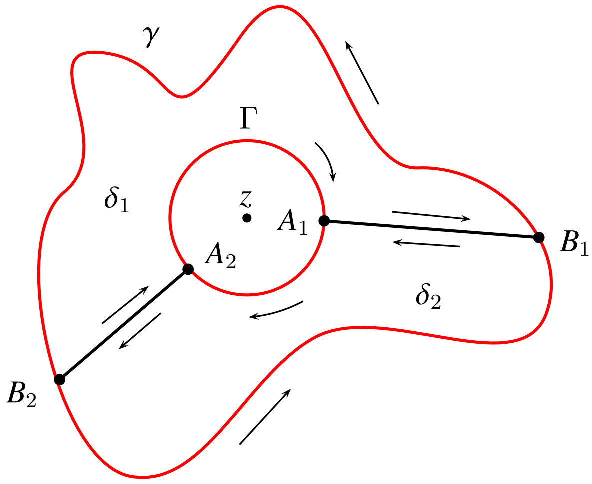
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw,$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα z στο εσωτερικό τού γ και επιλέγουμε ένα **αρνητικά** προσανατολισμένο κύκλο Γ με κέντρο z έτσι ώστε ο Γ να βρίσκεται στο εσωτερικό τού γ. Από τον ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy για παραγώγους και το θεώρημα 6.5 έχουμε ότι

$$f^{(n)}(z) = -\frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

Επιλέγουμε τώρα δυο σημεία A_1 και A_2 πάνω στον κύκλο και τα συνδέουμε με δυο σημεία B_1 και B_2 πάνω στο γ μέσω δυο ευθύγραμμων τμημάτων. Προσέχουμε ώστε τα δυο ευθύγραμμα τμήματα να είναι στο εσωτερικό του γ (εκτός φυσικά από τα άκρα B_1 και B_2).



Δημιουργούνται έτσι δυο κλειστά μονοπάτια δ_1 και δ_2. Το δ_1 αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[A_1, B_1]$, μετά το κομμάτι B_1B_2 τού γ (διαγραφόμενο αριστερόστροφα), το ευθύγραμμο τμήμα $[B_2, A_2]$ και τέλος το τόξο A_2A_1 πάνω στον Γ (διαγραφόμενο δεξιόστροφα). Το δ_2 αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[A_2, B_2]$, μετά το κομμάτι B_2B_1 τού γ (διαγραφόμενο αριστερόστροφα), το ευθύγραμμο τμήμα $[B_1, A_1]$ και τέλος το τόξο A_1A_2 πάνω στον Γ (διαγραφόμενο δεξιόστροφα). Το εσωτερικό των δ_1 και δ_2 βρίσκεται μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(w) = \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}},$$

δηλαδή στο $U \setminus \{z\}$. Επομένως από το θεώρημα τού Cauchy

$$\int\limits_{\delta_1} g(w)\, dw = 0, \qquad \int\limits_{\delta_2} g(w)\, dw = 0.$$

Αλλά

$$\int\limits_{\delta_1} g(w)\, dw = \int\limits_{[A_1,B_1]} g(w)\, dw + \int\limits_{B_1B_2} g(w)\, dw + \int\limits_{[B_2,A_2]} g(w)\, dw + \int\limits_{A_2A_1} g(w)\, dw,$$

$$\int\limits_{\delta_2} g(w)\, dw = \int\limits_{[A_2,B_2]} g(w)\, dw + \int\limits_{B_2B_1} g(w)\, dw + \int\limits_{[B_1,A_1]} g(w)\, dw + \int\limits_{A_1A_2} g(w)\, dw.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\delta_1} g(w)\,dw + \int_{\delta_2} g(w)\,dw \\
&= \left(\int_{[A_1,B_1]} g(w)\,dw + \int_{[B_1,A_1]} g(w)\,dw \right) + \left(\int_{[A_2,B_2]} g(w)\,dw + \int_{[B_2,A_2]} g(w)\,dw \right) \\
&+ \left(\int_{A_1A_2} g(w)\,dw + \int_{A_2A_1} g(w)\,dw \right) + \left(\int_{B_1B_2} g(w)\,dw + \int_{B_2B_1} g(w)\,,dw \right).
\end{aligned}
$$

Τα αθροίσματα στις δυο πρώτες παρενθέσεις είναι ίσα με μηδέν γιατί τα ευθύγραμμα τμήματα διαγράφονται με αντίθετες φορές. Το άθροισμα στην τρίτη παρένθεση είναι ίσο με το ολοκλήρωμα τής g πάνω στον κύκλο Γ γιατί ο Γ αποτελείται από τα διαδοχικά τόξα A_1A_2 και A_2A_1. Το άθροισμα στην τέταρτη παρένθεση είναι ίσο με το ολοκλήρωμα τής g πάνω στο γ γιατί το γ αποτελείται από τα διαδοχικά μονοπάτια B_1B_2 και B_2B_1. Συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\gamma} g(w)\,dw = -\int_{\Gamma} g(w)\,dw.$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw &= \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} g(w)\,dw = -\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(w)\,dw \\
&= -\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = f^{(n)}(z).
\end{aligned}
$$

□

Παράδειγμα. Θα γενικεύσουμε το θεώρημα 6.11. Αν το γ είναι ένα κλειστό μονοπάτι και z ένα σημείο εκτός τού γ, τότε

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 0, & \text{αν το } z \text{ ανήκει στο εξωτερικό τού } \gamma \\ 2\pi i, & \text{αν το } z \text{ ανήκει στο εσωτερικό τού } \gamma \end{cases}.$$

Αν το z είναι στο εσωτερικό τού γ τότε εφαρμόζουμε τον γενικό ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy για τη συνάρτηση $f(w) = 1$ και παίρνουμε

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 2\pi i f(z) = 2\pi i.$$

Αν το z είναι στο εξωτερικό τού γ τότε το εσωτερικό τού γ περιέχεται στο πεδίο ορισμού τής συνάρτησης $g(w) = \frac{1}{w-z}$, άρα από το θεώρημα τού Cauchy, $\int_{\gamma} g(w)\,dw = 0$.

Συμπλήρωμα. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό που κάναμε στην απόδειξη τού ολοκληρωτικού τύπου τού Cauchy για παραγώγους (θεώρημα 7.2). Δηλαδή ότι μπορούμε να εναλλάξουμε όριο και ολοκλήρωμα. Για απλότητα δείχνουμε την περίπτωση $n = 0$. Η μόνη διαφορά στη γενική περίπτωση είναι ότι εμπλέκονται πιο περίπλοκες πράξεις. Για $w \in C(z_0, r)$ και h με

$$0 < |h| < \frac{r - |z - z_0|}{2}$$

έχουμε

$$|w-z| = |w-z_0+z_0-z| \geq |w-z_0| - |z-z_0| = r-|z-z_0|,$$

$$|w-z-h| \geq |w-z| - |h| > r-|z-z_0| - \frac{r-|z-z_0|}{2} = \frac{r-|z-z_0|}{2}.$$

Άρα

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} f(w) \frac{1}{h} \left(\frac{1}{w-z-h} - \frac{1}{w-z} \right) dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} f(w) \frac{1}{(w-z)^2}\, dw \right|$$

$$= \frac{|h|}{2\pi} \left| \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h)(w-z)^2}\, dw \right| \leq \frac{2r|h| \max\{|f(w)| : w \in C(z_0,r)\}}{(r-|z-z_0|)^3} \to 0,$$

καθώς $h \to 0$.

Σειρές Taylor

Θα δείξουμε ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση αναπτύσσεται τοπικά σε δυναμοσειρά και αντίστροφα, κάθε δυναμοσειρά ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση. "Τοπικά" σημαίνει σε κάθε δίσκο που περιέχεται στο πεδίο ορισμού τής συνάρτησης.

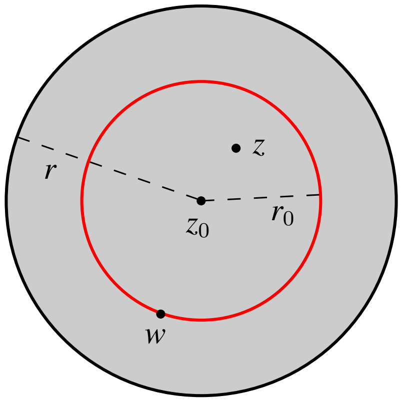
Θεώρημα 7.6. *Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο, $D(z_0, r)$ ένας δίσκος στο U, και f μια αναλυτική συνάρτηση στο U. Τότε για κάθε $z \in D(z_0, r)$ έχουμε*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Η παραπάνω δυναμοσειρά ονομάζεται **σειρά Taylor** *με κέντρο z_0 τής f.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $z \in D(z_0, r)$ και επιλέγουμε r_0 τέτοιο ώστε $|z - z_0| < r_0 < r$. Τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$



Τώρα, χρησιμοποιούμε τη γεωμετρική σειρά και το κριτήριο Weierstarss ακριβώς όπως στην απόδειξη τού θεωρήματος 6.11.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)}\, dw &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_0)} \frac{f(w)}{w - z_0 - (z - z_0)}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_0)} \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n dw \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \right) (z - z_0)^n.
\end{aligned}$$

Από τον ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy για παραγώγους (θεώρημα 7.2), έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

και το συμπέρασμα έπεται □

Παρατήρηση. Από το θεώρημα 4.2 η ακτίνα σύγκλισης τής σειράς Taylor είναι τουλάχιστο r. Επίσης, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο τού $D(z_0, r)$.

Παραδείγματα.

- Η εκθετική συνάρτηση $f(z) = e^z$. Η f είναι αναλυτική σ΄ολόκληρο το $\mathbb{C}$ άρα αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο οποιοδήποτε σημείο και άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Ας την αναπτύξουμε στο 0. Έχουμε $f^{(n)}(0) = 1$ για κάθε n, άρα
$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$
για κάθε z.
- Η $f(z) = \sin z$. Όπως πριν η f είναι αναλυτική παντού. Στο 0 έχουμε
$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = 1, \dots$$
Άρα
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots,$$
για κάθε z.
- Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα,
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots,$$
για κάθε z.
- Η $f(z) = \operatorname{Log} z$. Η f είναι αναλυτική στο $A = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Επομένως δεν μπορούμε να την αναπτύξουμε στο 0 (στο 0 άλλωστε η συνάρτηση δεν ορίζεται) ή σε οποιονδήποτε θετικό πραγματικό. Ας την αναπτύξουμε στο -1. Ο μεγαλύτερος ανοιχτός δίσκος με κέντρο το -1 ο οποίος περιέχεται στο A είναι ο $D(-1, 1)$. Έχουμε
$$f(-1) = \pi i,\ f'(-1) = -1,\ f''(-1) = -1,\ f^{(3)}(-1) = -1 \cdot 2,\ f^{(4)}(-1) = -1 \cdot 2 \cdot 3, \dots$$
Άρα
$$\operatorname{Log} z = \pi i - (z+1) - \frac{(z+1)^2}{2} - \frac{(z+1)^3}{3} - \frac{(z+1)^4}{4} - \cdots,$$
για κάθε $z \in D(-1, 1)$.
- Δείχνουμε ότι η εκθετική συνάρτηση είναι η μοναδική αναλυτική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι δηλαδή η μοναδική αναλυτική επέκταση τής συνηθισμένης εκθετικής συνάρτησης τού Απειροστικού Λογισμού. Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
$$f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x.$$
Έτσι
$$f''(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x.$$
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε ότι $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε n και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ιδιαίτερα $f^{(n)}(0) = 1$ για κάθε n. Αλλά, αφού η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο 0 και άπειρη ακτίνα σύγκλισης, έχουμε ότι
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$
για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Αλλά η τελευταία σειρά συγκλίνει στην εκθετική συνάρτηση από το 1ο παράδειγμα. Ανάλογα δείχνουμε ότι οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι οι

μοναδικές αναλυτικές επεκτάσεις των συνηθισμένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων τού Απειροστικού Λογισμού. Παρατηρήστε ότι ο Log δεν είναι συνεχής στον θετικό άξονα, επομένως δεν είναι αναλυτική επέκταση τού συνηθισμένου λογαρίθμου. Το ίδιο ισχύει και για τις μη ακέραιες δυνάμεις.

Δείχνουμε τώρα το αντίστροφο τού θεωρήματος 7.6: Κάθε δυναμοσειρά ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση.

Θεώρημα 7.7. *Έστω ότι* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *για κάθε* z *σε κάποιο δίσκο* $D(z_0, r)$. *Τότε η* f *είναι αναλυτική και*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η f είναι αναλυτική χρησιμοποιούμε το θεώρημα Morera. Αρκεί να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα τής f πάνω σε κάθε τρίγωνο στο $D(z_0, r)$ είναι μηδέν. Έστω λοιπόν ένα τρίγωνο $T \subset D(z_0, r)$, και έστω $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς. Από το θεώρημα 4.2, $s_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο τού $D(z_0, r)$, άρα και στο T. Επομένως, από το θεώρημα 6.7,

$$\int_T s_n(z)\,dz \to \int_T f(z)\,dz.$$

Αλλά, το s_n είναι πολυώνυμο, άρα αναλυτική συνάρτηση. Συνεπώς, από το θεώρημα τού Cauchy, $\int_T s_n(z)\,dz = 0$ για κάθε n. Άρα $\int_T f(z)\,dz = 0$. Για να δείξουμε ότι $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, παρατηρούμε ότι η s_n' είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $s_n'(z) \to f'(z)$ για κάθε z. Σταθεροποιούμε $z \in D(z_0, r)$ και επιλέγουμε r_0 τέτοιο ώστε $|z-z_0| < r_0 < r$. Τότε, από τον ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy για παραγώγους, έχουμε

$$|s_n'(z) - f'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(z_0,r_0)} \frac{s_n(w)-f(w)}{(z-w)^2}\,dw\right|.$$

Τώρα για w πάνω στον κύκλο $C(z_0, r_0)$, έχουμε

$$|z-w| = |z-z_0+z_0-w| \geq |z_0-w| - |z-z_0| = r_0 - |z-z_0|.$$

Αυτό είναι γεωμετρικά προφανές. Αν το z είναι ένα σταθεροποιημένο σημείο στο εσωτερικό τού κύκλου και το w κινείται πάνω στον κύκλο, η μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει η απόσταση των δυο αυτών σημείων είναι αυτή που έχουν όταν τα z, w και z_0 γίνουν συνευθειακά, δηλαδή $r_0 - |z-z_0|$. Άρα

$$\max_{w\in C(z_0,r_0)}\left|\frac{s_n(w)-f(w)}{(z-w)^2}\right| \leq \frac{\max\{|s_n(w)-f(w)| : w \in C(z_0,r_0)\}}{(r_0-|z-z_0|)^2}.$$

Επομένως από το θεώρημα 6.6 έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(z_0,r_0)} \frac{s_n(w)-f(w)}{(z-w)^2}\,dw\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\ell\left(C(z_0,r_0)\right)\frac{\max\{|s_n(w)-f(w)| : w \in C(z_0,r_0)\}}{(r_0-|z-z_0|)^2}\\ &= \frac{r_0}{(r_0-|z-z_0|)^2}\max\{|s_n(w)-f(w)| : w \in C(z_0,r_0)\} \to 0,\end{aligned}$$

διότι $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο $C(z_0, r_0)$. ◻

Παρατήρηση. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, μπορούμε να παραγωγίσουμε μια δυναμοσειρά σαν να ήταν πολυώνυμο.

Τέλος, δείχνουμε ότι οι συντελεστές στο ανάπτυγμα Taylor είναι μοναδικοί.

Θεώρημα 7.8. *Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ για κάθε z σε κάποιο δίσκο με κέντρο z_0, τότε*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Απόδειξη. Προφανώς $f(z_0) = a_0$. Από το θεώρημα 7.7 έχουμε

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \cdots,$$

άρα $f'(z_0) = a_1$. Παραγωγίζουμε πάλι και παίρνουμε

$$f''(z) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(z-z_0) + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(z-z_0)^2 + \cdots,$$

επομένως $f''(z_0) = 2a_2$. Μετά από n διαδοχικές παραγωγίσεις θα έχουμε $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$. □

Παρατήρηση. Τα θεωρήματα 7.6, 7.7 και 7.8 μας λένε ότι αναλυτικές συναρτήσεις, δυναμοσειρές και σειρές Taylor είναι, χοντρικά, το ίδιο πράγμα.

Παράδειγμα. Θα αναπτύξουμε σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Το πεδίο ορισμού τής f είναι το $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Επομένως ο μεγαλύτερος δίσκος που βρίσκεται στο πεδίο ορισμού τής f και έχει κέντρο το μηδέν είναι ο $D(0,1)$. Για z μέσα στο δίσκο αυτό, ο τύπος 3.6 για το άθροισμα γεωμετρικής σειράς μας δίνει

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{i}} + \frac{1}{1-\frac{z}{i}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{i}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}. \end{aligned}$$

Αφού οι συντελεστές Taylor είναι μοναδικοί, η παραπάνω σειρά είναι αναγκαστικά η σειρά Taylor τής f. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα $f^{(n)}(0)$, αλλά αυτό θα είχε αρκετές πράξεις.

Ρίζες αναλυτικών συναρτήσεων

Έστω f μια συνάρτηση αναλυτική σε κάποιο δίσκο $D(z_0, r)$. Υποθέτουμε ότι $f(z_0) = 0$ και αναπτύσσουμε την f σε δυναμοσειρά με κέντρο z_0.

$$f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j.$$

Τότε ακριβώς ένα από τα παρακάτω μπορεί να συμβεί.

(1) Όλα τα a_j είναι μηδέν. Τότε η f είναι ίση με μηδέν σε ολόκληρο το δίσκο.
(2) Υπάρχει κάποιο $j \neq 0$ τέτοιο ώστε $a_j \neq 0$. Τότε το μικρότερο από αυτά τα j ονομάζεται **τάξη** ή **πολλαπλότητα** τής ρίζας z_0.

Παραδείγματα.

- Το 0 είναι ρίζα τάξης n τής z^n.
- Το 0 είναι ρίζα τάξης 1 τής $\sin z$ διότι

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots .$$

Παρατήρηση. Αν το z_0 είναι ρίζα τάξης n τής f, τότε

$$f(z) = \sum_{j=n}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j = (z - z_0)^n g(z),$$

όπου

$$g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+n} (z - z_0)^j.$$

Η g είναι αναλυτική (ως δυναμοσειρά), και $g(z_0) = a_n \neq 0$. Άρα η g δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή τού z_0. Δηλαδή αν το z_0 είναι ρίζα τής f, τότε σε κάποια περιοχή τής ρίζας η f μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Ο ένας παράγοντας είναι $(z - z_0)^n$, όπου n είναι η τάξη τής ρίζας. Ο άλλος παράγοντας είναι μια αναλυτική συνάρτηση η οποία δεν μηδενίζεται.

Θεώρημα 7.9 (Κανόνας L'Hopital)**.** *Έστω $f, g : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ αναλυτικές τέτοιες ώστε $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η g δεν είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Τότε τα όρια*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}, \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

υπάρχουν (μπορεί να είναι ∞), και είναι ίσα.

Απόδειξη. Αν η f είναι ταυτοτικά ίση μηδέν τότε και τα δύο όρια είναι ίσα με μηδέν. Αν η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν, τότε γράφουμε $f(z) = (z - z_0)^n f_1(z)$ και $g(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$, όπου n και m είναι οι τάξεις των ριζών, και οι f_1, g_1 δεν μηδενίζονται σε κάποια περιοχή τού z_0. Έτσι

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{f_1(z)}{g_1(z)} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } n > m \\ \infty, & \text{αν } n < m \\ \frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)}, & \text{αν } n = m \end{cases}.$$

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{n f_1(z) + (z - z_0) f_1'(z)}{m g_1(z) + (z - z_0) g_1'(z)} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } n > m \\ \infty, & \text{αν } n < m \\ \frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)}, & \text{αν } n = m \end{cases}.$$

□

Παρατήρηση. Από την απόδειξη τού προηγούμενου θεωρήματος βλέπουμε ότι αν το z_0 είναι ρίζα των f και g, τότε το $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ είναι πεπερασμένο και μη μηδενικό αν και μόνο αν το z_0 έχει την ίδια τάξη ως προς τις f και g. Έτσι, αφού το z_0 είναι ρίζα τάξης n τής $(z-z_0)^n$, συμπεραίνουμε ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης n τής f αν και μόνο αν το $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ είναι πεπερασμένο και μη μηδενικό.

Παράδειγμα. Από τον κανόνα L'Hopital έχουμε

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z^2}{z^2} = \lim_{w\to 0} \frac{\sin w}{w} = \lim_{w\to 0} \cos w = 1.$$

Άρα το 0 είναι ρίζα τάξης 2 τής $\sin z^2$.

Το θεώρημα Liouville

Μια συνάρτηση η οποία είναι αναλυτική σ'ολόκληρο το $\mathbb{C}$ λέγεται **ακέραιη**.

Θεώρημα 7.10 (Liouville)**.** *Αν η f είναι ακέραιη και φραγμένη τότε είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε z, και αναπτύσσουμε την f σε σειρά Taylor με κέντρο 0 και άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $f^{(n)}(0) = 0$, άρα $f(z) = f(0)$ για κάθε z, συνεπώς η f είναι σταθερή. Σταθεροποιούμε $n \geq 1$. Τότε για κάθε $r > 0$, ο ολοκληρωτικός τύπος τού Cauchy για παραγώγους (θεώρημα 7.2) δίνει

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw.$$

Άρα από το θεώρημα 6.6 έχουμε

$$|f^{(n)}(0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \ell\left(C(0,r)\right) \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|^{n+1}} \leq \frac{M}{r^n}.$$

Στέλνοντας το r στο $+\infty$ παίρνουμε ότι $f^{(n)}(0) = 0$. ☐

Παρατηρήσεις.

- Το θεώρημα Liouville μας δίνει μια εναλλακτική απόδειξη ότι οι συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ δεν είναι φραγμένες.
- Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Liouville μπορούμε να αποδείξουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα τής Άλγεβρας: Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο έχει ρίζα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι P είναι ένα πολυώνυμο βαθμού τουλάχιστο 1 τέτοιο ώστε $P(z) \neq 0$ για κάθε z, τότε η συνάρτηση $\frac{1}{P}$ είναι ακέραιη και

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{P(z)} = 0.$$

  Από τον ορισμό τού ορίου, υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq 1$ για κάθε z με $|z| > R$. Επίσης η $\frac{1}{P}$ είναι φραγμένη στο συμπαγές σύνολο $\overline{D}(0, R)$. Άρα η $\frac{1}{P}$ είναι φραγμένη σ'ολόκληρο το $\mathbb{C}$. Επομένως, από το θεώρημα Liouville είναι σταθερή. Αλλά τότε και το P είναι σταθερό, άτοπο.

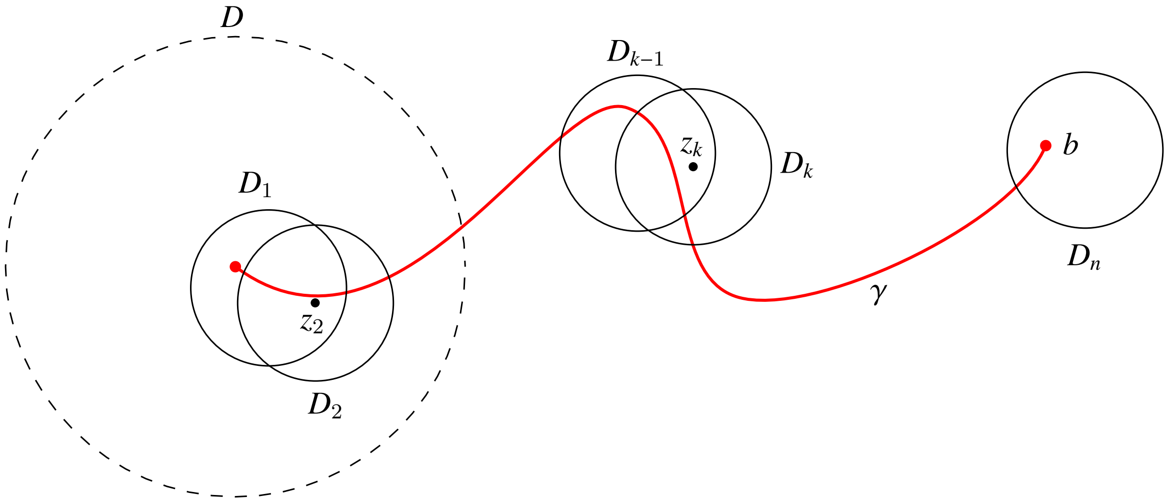
Η αρχή τής ταυτότητας

Θα δείξουμε ότι αν μια αναλυτική συνάρτηση ορίζεται σ' ένα συνεκτικό σύνολο και είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν σε κάποιο δίσκο, τότε είναι ίση με μηδέν παντού!

Θεώρημα 7.11 (Η αρχή τής ταυτότητας)**.** *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική τέτοια ώστε $f(z) = 0$ για κάθε z σε κάποιο ανοιχτό δίσκο $D \subset U$. Τότε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in U$.*

Απόδειξη. Έστω b ένα τυχόν σημείο τού U. Θα δείξουμε ότι $f(b) = 0$. Αφού το U είναι συνεκτικό, μπορούμε να συνδέσουμε το κέντρο τού D με το b με μια καμπύλη γ η οποία βρίσκεται μέσα στο U. Καλύπτουμε τη γ με ένα πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών ανοιχτών δίσκων $D_k \subset U$ με κέντρα z_k, $k = 1, \ldots, n$, έτσι ώστε

- $D_1 \subset D$, δηλαδή ο πρώτος δίσκος περιέχεται στον D.
- $b \in D_n$, δηλαδή ο τελευταίος δίσκος περιέχει το σημείο b.
- Για κάθε $k = 2, 3, \ldots, n$ έχουμε $z_k \in D_{k-1}$, δηλαδή το κέντρο κάθε δίσκου περιέχεται στον προηγούμενο.



Θα δείξουμε επαγωγικά ότι η f είναι ίση με μηδέν σε όλους τους D_k. Προφανώς $f = 0$ στον D_1 αφού ο D_1 περιέχεται στον D και εκεί η f από υπόθεση είναι ίση με μηδέν. Έστω τώρα ότι $f = 0$ στον D_{k-1}. Θα δείξουμε ότι $f = 0$ στον D_k. Αφού η f είναι ίση με μηδέν στον D_{k-1} το ίδιο ισχύει και για τις παραγώγους όλων των τάξεων. Ιδιαίτερα, $f^{(j)}(z_k) = 0$ για κάθε j. Τώρα αναπτύσσουμε την f σε σειρά Taylor με κέντρο z_k. Τότε για κάθε $z \in D_k$ έχουμε

$$f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(z_k)}{j!}(z - z_k)^j.$$

Δηλαδή $f = 0$ στον D_k. Αυτό συμπληρώνει την επαγωγή. Ιδιαίτερα έχουμε ότι $f = 0$ στον D_n, άρα $f(b) = 0$. □

Παρατηρήσεις.

- Η υπόθεση τής συνεκτικότητας είναι απαραίτητη στο προηγούμενο θεώρημα. Για παράδειγμα, μια αναλυτική συνάρτηση μπορεί να είναι ορισμένη σε δυο ξένους δίσκους, να παίρνει την τιμή 0 στον ένα και την τιμή 15 στον άλλο.
- Έπεται άμεσα από την αρχή τής ταυτότητας ότι αν δυο αναλυτικές συναρτήσεις είναι ορισμένες σε συνεκτικό σύνολο και είναι ίσες σε κάποιο δίσκο τότε είναι ίσες παντού.

Η αρχή μέγιστου και η αρχή ελάχιστου

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει κάποιο σημείο z_0.

- Το z_0 λέγεται **σημείο τοπικού μέγιστου** τής $|f|$ αν υπάρχει περιοχή $D(z_0, r)$ τού z_0 τέτοια ώστε $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ για κάθε $z \in D(z_0, r)$.
- Το z_0 λέγεται **σημείο τοπικού ελάχιστου** τής $|f|$ αν υπάρχει περιοχή $D(z_0, r)$ τού z_0 τέτοια ώστε $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ για κάθε $z \in D(z_0, r)$.

Χρησιμοποιώντας την αρχή τής ταυτότητας θα δείξουμε ότι το μέτρο μιας αναλυτικής συνάρτησης ορισμένης σε συνεκτικό σύνολο δεν έχει σημεία τοπικού μέγιστου, εκτός κι'αν η συνάρτηση είναι σταθερή.

Θεώρημα 7.12 (Αρχή μέγιστου). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, όχι σταθερή. Τότε η $|f|$ δεν έχει σημεία τοπικού μέγιστου.*

Απόδειξη. Έστω ότι κάποιο $z_0 \in U$ ήταν σημείο τοπικού μέγιστου τής $|f|$. Τότε θα υπήρχε δίσκος $\overline{D}(z_0, r_0) \subset U$ τέτοιος ώστε $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ για κάθε $z \in D(z_0, r_0)$. Για κάθε $r > 0$ με $r < r_0$, θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο z_0 και ακτίνα r, δηλαδή την καμπύλη $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy (θεώρημα 7.1), έχουμε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, dt.$$

Υποθέσαμε ότι το z_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου, άρα $|f(re^{it})| \leq |f(z_0)|$. Έτσι αν πάρουμε μέτρα στη σχέση με τα ολοκληρώματα έχουμε

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\, dt \leq |f(z_0)|.$$

Επομένως

$$\int_0^{2\pi} \Big(|f(z_0)| - |f(re^{it})| \Big)\, dt = 0.$$

Η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα είναι, σαν συνάρτηση τού t, συνεχής και μη αρνητική για κάθε $r < r_0$. Αφού έχει μηδενικό ολοκλήρωμα πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Δηλαδή $|f(re^{it})| = |f(z_0)|$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ και κάθε $r < r_0$, συνεπώς $|f(z)| = |f(z_0)|$ για κάθε $z \in D(z_0, r_0)$. Έτσι η f έχει σταθερό μέτρο στο δίσκο $D(z_0, r_0)$, επομένως από το θεώρημα 5.7 είναι σταθερή στο δίσκο. Άρα, από την αρχή τής ταυτότητας (θεώρημα 7.11), είναι σταθερή σ'ολόκληρο το U, άτοπο. □

Παρατήρηση. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι το U είναι φραγμένο και ότι η f μπορεί να επεκταθεί με συνεχή τρόπο στο σύνορο του U. Αυτό σημαίνει ότι αν ονομάσουμε B το σύνορο τού U, τότε υπάρχει συνεχής $F : U \cup B \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $F = f$ στο U. Στην περίπτωση αυτή, από το θεώρημα 3.16, η $|F|$ παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο $z_0 \in U \cup B$ διότι το $U \cup B$ είναι κλειστό και φραγμένο, άρα συμπαγές. Από την αρχή μέγιστου το z_0 δεν μπορεί να ανήκει στο U. Επομένως το z_0 ανήκει αναγκαστικά στο σύνορο τού U. Δηλαδή, **αν μια αναλυτική συνάρτηση είναι ορισμένη σε φραγμένο σύνολο και επεκτείνεται συνεχώς στο σύνορο, τότε το μέτρο της παίρνει μέγιστη τιμή στο σύνορο**.

Θεώρημα 7.13 (Αρχή ελάχιστου). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, όχι σταθερή. Υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται πουθενά. Τότε η $|f|$ δεν έχει σημεία τοπικού ελάχιστου.*

Απόδειξη. Θέτουμε $g = \frac{1}{f}$. Τότε από την αρχή μέγιστου η $|g|$ δεν έχει σημεία τοπικού μέγιστου, άρα η $|f|$ δεν έχει σημεία τοπικού ελάχιστου. □

Παρατηρήσεις.

- Η υπόθεση ότι η f δεν μηδενίζεται πουθενά είναι απαραίτητη στην αρχή ελάχιστου. Για παράδειγμα, αν $f(z) = z$ τότε το 0 είναι σημείο τοπικού ελάχιστου τής $|f|$.
- Όπως και στην αρχή μέγιστου, **αν μια αναλυτική συνάρτηση είναι ορισμένη σε φραγμένο σύνολο, δεν μηδενίζεται πουθενά, και επεκτείνεται συνεχώς στο σύνορο, τότε το μέτρο της παίρνει ελάχιστη τιμή στο σύνορο**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Αναλυτικές συναρτήσεις με ανωμαλίες

Μεμονωμένες ανωμαλίες

Έστω f μια συνάρτηση αναλυτική σ'ένα σύνολο τής μορφής $D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$ (δηλαδή σ'ένα τρύπιο δίσκο). Τότε λέμε ότι το z_0 είναι **μεμονωμένη ανωμαλία** τής f.

Παραδείγματα.

- Το 0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία τής $\frac{1}{z}$.
- Το i και το $-i$ είναι μεμονωμένες ανωμαλίες τής $\frac{1}{z^2+1}$.
- Τα σημεία $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένες ανωμαλίες τής $\frac{1}{\sin z}$.
- Το 0 δεν είναι μεμονωμένη ανωμαλία τής $\operatorname{Log} z$ γιατί η συνάρτηση αυτή δεν είναι αναλυτική σε καμία τρύπια περιοχή τού 0.
- Το 0 δεν είναι μεμονωμένη ανωμαλία τής $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ γιατί σε κάθε τρύπια περιοχή τού μηδενός μπορούμε να βρούμε σημεία τής μορφής $\frac{1}{k\pi}$, και στα σημεία αυτά η συνάρτηση δεν ορίζεται.

Παρατήρηση. Για να είναι ένα σημείο z_0 μεμονωμένη ανωμαλία τής f δεν αρκεί το z_0 να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού τής f. Πρέπει η συνάρτηση να είναι αναλυτική γύρω από το z_0.

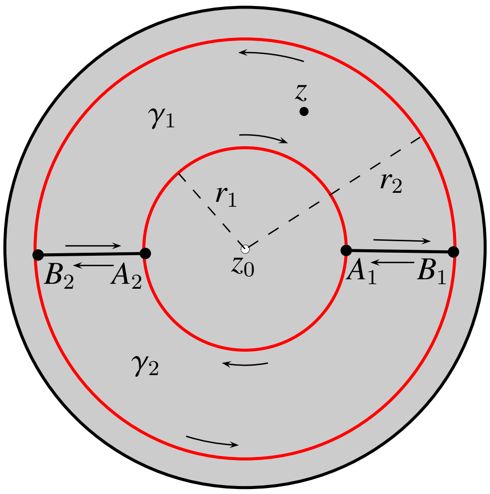
Το ακόλουθο θεώρημα παίζει το ρόλο τού ολοκληρωτικού τύπου τού Cauchy για συναρτήσεις με μεμονωμένες ανωμαλίες.

Θεώρημα 8.1. *Έστω $f : D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Τότε για κάθε $z \in D(z_0, r_0)$ με $z \neq z_0$ έχουμε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw,$$

για κάθε δύο θετικά προσανατολισμένους κύκλους $C(z_0, r_1)$ και $C(z_0, r_2)$ με $r_1 < |z-z_0| < r_2 < r_0$.

Απόδειξη. Συνδέουμε τούς κύκλους με δυο ευθύγραμμα τμήματα $[A_1, B_1]$ και $[A_2, B_2]$ όπως στο σχήμα.



Δημιουργούνται έτσι δυο κλειστά, θετικά προσανατολισμένα μονοπάτια γ_1 και γ_2 το εσωτερικό των οποίων βρίσκεται στο πεδίο ορισμού τής f. Το γ_1 αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[A_1, B_1]$, το τόξο B_1B_2 διαγραφόμενο αριστερόστροφα, το ευθύγραμμο τμήμα $[B_2, A_2]$ και το τόξο A_2A_1 διαγραφόμενο δεξιόστροφα. Το γ_2 αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[A_2, B_2]$, το τόξο B_2B_1 διαγραφόμενο αριστερόστροφα, το ευθύγραμμο τμήμα $[B_1, A_1]$ και το τόξο A_1A_2 διαγραφόμενο δεξιόστροφα. Το z βρισκεται στο εσωτερικό τού γ_1, άρα από τον γενικό ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy (θεώρημα 7.5) έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Επίσης, το εσωτερικό τού γ_2 περιέχεται στο πεδίο ορισμού τής $\frac{f(w)}{w-z}$, επομένως

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = 0.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{B_1B_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{B_2B_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \right) + \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{A_1A_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{A_2A_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \right) \\
&+ \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[A_1,B_1]} \frac{f(w)}{w-z}\, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[B_1,A_1]} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \right) \\
&+ \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[A_2,B_2]} \frac{f(w)}{w-z}\, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[B_2,A_2]} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \right).
\end{aligned}$$

Το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στην πρώτη παρένθεση είναι ίσο με το ολοκλήρωμα πάνω στον κύκλο $C(z_0, r_2)$ γιατί ο κύκλος αποτελείται από τα διαδοχικά τόξα B_1B_2 και B_2B_1. Ομοίως το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στη δεύτερη παρένθεση είναι ίσο με το ολοκλήρωμα πάνω στον κύκλο $C(z_0, r_1)$ αρνητικά προσανατολισμένο. Τα αθροίσματα στις δυο τελευταίες παρενθέσεις είναι ίσα με μηδέν γιατί τα ευθύγραμμα τμήματα διαγράφονται με αντίθετες φορές.

□

Παρατήρηση. Ούτε ο ολοκληρωτικός τύπος τού Cauchy ούτε το θεώρημα τού Cauchy μπορούν να χρησιμοποιηθούν απ'ευθείας για τον υπολογισμό των δυο ολοκληρωμάτων στο προηγούμενο θεώρημα γιατί τα εσωτερικά των κύκλων δεν περιέχονται στο πεδίο ορισμού τής f (υπάρχει η τρύπα στο z_0). Αυτός είναι ο λόγος που στην απόδειξη χρησιμοποίησαμε βοηθητικές διαδρομές ώστε να δημιουργηθούν μονοπάτια το εσωτερικό των οποίων να βρίσκεται στον τρύπιο δίσκο.

Σειρές Laurent

Έχουμε δει ότι μια αναλυτική συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Taylor γύρω από κάθε σημείο τού πεδίου ορισμού της. Θα δείξουμε ότι γύρω από μια μεμονωμένη ανωμαλία μια αναλυτική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε ένα είδος "δυναμοσειράς" η οποία περιέχει και αρνητικές δυνάμεις.

Θεώρημα 8.2. *Έστω $f : D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση. Τότε υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots$ και $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ τέτοια ώστε*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

για κάθε $z \in D(z_0, r_0)$ με $z \neq z_0$.

Η χρήση αρνητικών δεικτών στα a είναι καθαρά θέμα συμβολισμού και γίνεται για να υπάρχει αρμονία με τους εκθέτες του $z - z_0$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $z \in D(z_0, r_0)$ με $z \neq z_0$ και επιλέγουμε r_1 και r_2 με $0 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < r_0$. Τότε από το θεώρημα 8.1 έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τη γεωμετρική σειρά και το κριτήριο Weierstarss ακριβώς όπως στην απόδειξη τού θεωρήματος 6.11.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \right) (z - z_0)^n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw &= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}}\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n dw \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_1)} f(w)(w - z_0)^n\, dw \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0, r_1)} f(w)(w - z_0)^{n-1}\, dw \right) \frac{1}{(z - z_0)^n}.
\end{aligned}$$

Έτσι η f έχει τη ζητούμενη αναπαράσταση με

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw, \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r_1)} f(w)(w-z_0)^{n-1}\, dw,$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ □

Παρατηρήσεις.

- Στο προηγούμενο θεώρημα η έκφραση

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

ονομάζεται **ανάπτυγμα Laurent** με κέντρο z_0 τής f. Συχνά συμβολίζουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

με

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n,$$

και ολόκληρο το ανάπτυγμα Laurent με

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Το κομμάτι που αντιστοιχεί στις μη αρνητικές δυνάμεις, δηλαδή το $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, είναι μια δυναμοσειρά και ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση σ'ολόκληρο το δίσκο. Το κομμάτι που αντιστοιχεί στις αρνητικές δυνάμεις, δηλαδή το $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$, αντανακλά την ύπαρξη τής ανωμαλίας στο z_0 και ονομάζεται **κύριο μέρος** τού αναπτύγματος Laurent.
- Στην απόδειξη τού προηγούμενου θεωρήματος, τα ολοκληρώματα που δίνουν τους συντελεστές τού αναπτύγματος Laurent δεν εξαρτώνται από τα r_1 και r_2. Δηλαδή για οποιοδήποτε r με $0 < r < r_0$ έχουμε ότι

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw, \tag{8.1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αυτό αποδεικνύεται με μια σχεδόν αυτολεξεί επανάληψη τού επιχειρήματος τής απόδειξης τού θεωρήματος 8.1.
- Γενικά, κάνοντας τη σύμβαση τής πρώτης παρατήρησης σχετικά με το τι σημαίνει το σύμβολο $\sum_{-\infty}^{+\infty}$, μια σειρά συναρτήσεων τής μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$$

ονομάζεται **σειρά Laurent**. Αν η σειρά συγκλίνει (δηλαδή, αν οι $\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ συγκλίνουν) για κάθε $z \in D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$ σε κάποια συνάρτηση g τότε, ακριβώς όπως στην περίπτωση των δυναμοσειρών, αποδεικνύεται ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο τού τρύπιου δίσκου και ότι η g είναι αναλυτική στον τρύπιο δίσκο. Επίσης αποδεικνύεται ότι

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw,$$

για κάθε r με $0 < r < r_0$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή οι συντελεστές στο ανάπτυγμα Laurent είναι μοναδικοί.

- Όλα τα προηγούμενα μας λένε ότι **οι σειρές Laurent σε τρύπιους δίσκους παίζουν το ρόλο των σειρών Taylor σε δίσκους**. Δηλαδή, αν η f είναι αναλυτική στο $D(z_0, r_0)$ τότε για κάθε z στο δίσκο έχουμε

(Taylor)
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

όπου

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}},$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και κάθε r με $0 < r < r_0$. Αν η f είναι αναλυτική στο $D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$ τότε για κάθε z στον τρύπιο δίσκο έχουμε

(Laurent)
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}},$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και κάθε r με $0 < r < r_0$. Στην περίπτωση αυτή δεν έχει φυσικά νόημα να αναζητήσουμε μια αναπαράσταση των a_n μέσω των παραγώγων τής f στο z_0 γιατί η συνάρτηση δεν ορίζεται στο z_0.

Παραδείγματα.

- Η συνάρτηση $e^{\frac{1}{z}}$ έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0. Θα την αναπτύξουμε σε σειρά Laurent με κέντρο το 0. Αναπτύσσουμε την e^z σε σειρά Taylor με κέντρο το 0.

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επομένως για κάθε $z \neq 0$ έχουμε

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

Από τη μοναδικότητα των συντελεστών Laurent, έχουμε ότι η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα Laurent.

- Η συνάρτηση $\frac{\sin z}{z}$ έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

για κάθε z. Άρα για κάθε $z \neq 0$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots .$$

Παρατηρήστε ότι εδώ το ανάπτυγμα Laurent δεν έχει κύριο μέρος. Θα επανέλθουμε σε αυτό στην επόμενη ενότητα.

- Η συνάρτηση $\frac{1}{z(z-1)}$ έχει μεμονωμένες ανωμαλίες στα σημεία 0 και 1. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά θα την αναπτύξουμε σε σειρά Laurent στους τρύπιους δίσκους $D(0,1) \setminus \{0\}$ και $D(1,1) \setminus \{1\}$. Για κάθε $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$ έχουμε

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Για κάθε $z \in D(1,1) \setminus \{1\}$ έχουμε

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Κατάταξη των ανωμαλιών

Στην ενότητα αυτή θα κατατάξουμε τις ανωμαλίες μιας συνάρτησης σχετικά με το "πόσο μεγάλο" είναι το κύριο μέρος τού αναπτύγματος Laurent. Έστω ότι η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0. Δηλαδή είναι αναλυτική σε κάποιο σύνολο $D \setminus \{z_0\}$, όπου D δίσκος με κέντρο το z_0. Αναπτύσσουμε την f σε σειρά Laurent.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

για κάθε $z \in D$, $z \neq z_0$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

(1) Το ανάπτυγμα Laurent δεν έχει κύριο μέρος, δηλαδή $a_n = 0$ για κάθε $n < 0$. Τότε λέμε ότι το z_0 είναι **επουσιώδης ανωμαλία**.
(2) Το κύριο μέρος έχει πεπερασμένο πλήθος πλήθος μη μηδενικών όρων. Τότε λέμε ότι το z_0 είναι **πόλος**. Στην περίπτωση αυτή, ο μεγαλύτερος φυσικός m για τον οποίο ισχύει $a_{-m} \neq 0$ λέγεται **τάξη** τού πόλου. Ένας πόλος τάξης 1 λέγεται **απλός**.
(3) Το κύριο μέρος έχει άπειρο πλήθος μη μηδενικών όρων. Τότε λέμε ότι το z_0 είναι **ουσιώδης ανωμαλία**.

Παραδείγματα. Εξετάζουμε τα παραδείγματα τής προηγηγούμενης ενότητας.

- Το 0 είναι επουσιώδης ανωμαλία τής $\frac{\sin z}{z}$ γιατί το ανάπτυγμα Laurent
$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$
δεν έχει κύριο μέρος.
- Το 0 και το 1 είναι απλοί πόλοι τής $\frac{1}{z(z-1)}$ γιατί το κύριο μέρος των αναπτυγμάτων Laurent
$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$$
και
$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n$$
έχει έναν όρο ο οποίος και στις δυο περιπτώσεις αντιστοιχεί στον συντελεστή a_{-1}.
- Το μηδέν είναι ουσιώδης ανωμαλία τής $e^{\frac{1}{z}}$ γιατί στο ανάπτυγμα Laurent
$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$
το κύριο μέρος έχει άπειρο πλήθος μη μηδενικών όρων.

Παρατηρήσεις.

- Αν το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία τότε
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ για κάθε } z \in D \setminus \{z_0\}.$$
Η σειρά στην παραπάνω έκφραση είναι μια δυναμοσειρά με κέντρο z_0, άρα είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο D. Επομένως αν επεκτείνουμε την f στο z_0 ορίζοντας
$$f(z_0) = a_0,$$

τότε η f γίνεται αναλυτική σ'ολόκληρο το D. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι **μια συνάρτηση με επουσιώδη ανωμαλία δεν έχει στην πραγματικότητα ανωμαλία**. Αυτό δικαιολογεί και τον όρο "επουσιώδης". Ισχύει και το αντίστροφο. Αν υπάρχει μια συνάρτηση g αναλυτική στο D τέτοια ώστε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in D \setminus \{z_0\}$, τότε το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία τής f. Πράγματι, αν αναπτύξουμε την g σε σειρά Taylor παίρνουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \text{ για κάθε } z \in D \setminus \{z_0\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το ανάπτυγμα Laurent τής f δεν έχει κύριο μέρος, άρα το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία

- Αν το z_0 είναι πόλος τάξης m τότε

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \text{ για κάθε } z \in D \setminus \{z_0\}.$$

με $a_{-m} \neq 0$. Άρα

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m}(z - z_0)^n, \text{ για κάθε } z \in D \setminus \{z_0\}.$$

Δηλαδή το ανάπτυγμα Laurent τής $(z - z_0)^m f(z)$ δεν έχει κύριο μέρος, επομένως η $(z - z_0)^m f(z)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία. Με άλλα λόγια **ο πόλος αίρεται αν πολλαπλασιάσουμε την f με** $(z - z_0)^m$. Επίσης, αν θέσουμε

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m}(z - z_0)^n,$$

τότε η g είναι αναλυτική στο D και $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$. Άρα η g δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή τού z_0, και

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \text{ για κάθε } z \in D \setminus \{z_0\}.$$

Δηλαδή γύρω από τον πόλο η f παραγοντοποιείται. Ο ένας παράγοντας (αυτός που προκαλεί την ανωμαλία) είναι ο $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ και ο άλλος είναι μια αναλυτική συνάρτηση η οποία δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή τού πόλου. Ισχύει και το αντίστροφο. Αν υπάρχει αναλυτική g στο D με $g(z_0) \neq 0$ τέτοια ώστε

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \text{ για κάθε } z \in D \setminus \{z_0\},$$

τότε το z_0 είναι πόλος τάξης m τής f. Πράγματι, αν αναπτύξουμε την g σε σειρά Taylor θα πάρουμε

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} \frac{g^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z - z_0)^n,$$

και το συμπέρασμα έπεται.

- Αν στη σχέση

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

τής προηγούμενης παρατήρησης θέσουμε

$$h(z) = \frac{(z - z_0)^m}{g(z)},$$

για κάθε z αρκετά κοντά στο z_0 ώστε $g(z) \neq 0$, θα πάρουμε

$$\frac{1}{f(z)} = h(z),$$

για κάθε z σε κάποια περιοχή τού z_0, με $z \neq z_0$. Αλλά η h είναι αναλυτική στην περιοχή αυτή, άρα το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία τής $\frac{1}{f}$. Συνεπώς η $\frac{1}{f}$ ορίζεται και στο z_0 αν τής δώσουμε την τιμή $h(z_0)$. Όμως το z_0 είναι ρίζα τάξης m τής h. Δείξαμε λοιπόν ότι αν το z_0 είναι πόλος τάξης m τής f τότε είναι ρίζα τάξης m τής $\frac{1}{f}$. Ισχύει και το αντίστροφο. Αν το z_0 είναι ρίζα τάξης m κάποιας u τότε $u(z) = (z - z_0)^m v(z)$, όπου η v δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή τού z_0. Αλλά τότε για κάθε z στην περιοχή αυτή, με $z \neq z_0$, έχουμε

$$\frac{1}{u(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m v(z)},$$

το οποίο από την προηγούμενη παρατήρηση συνεπάγεται ότι το z_0 είναι πόλος τάξης m τής $\frac{1}{u}$. Έτσι **ένα σημείο είναι πόλος μιας συνάρτησης αν και μόνο είναι ρίζα ίδιας τάξης τής (αλγεβρικής) αντίστροφης**.

Το επόμενο θεώρημα είναι χρήσιμο αν θέλουμε να προσδιορίσουμε το είδος τής ανωμαλίας. Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις.

Θεώρημα 8.3. *Έστω D ένας δίσκος με κέντρο z_0 και f μια αναλυτική συνάρτηση στο $D \setminus \{z_0\}$. Τότε*

(1) *Το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.*
(2) *Το z_0 είναι πόλος αν και μόνο αν $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Η τάξη τού πόλου είναι m αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ υπάρχει και είναι μη μηδενικό και πεπερασμένο.*
(3) *Το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ δεν υπάρχει.*

Απόδειξη.

(1) Αν το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία τότε η f μπορεί να οριστεί στο z_0 και να γίνει αναλυτική. Τότε όμως το όριό της στο z_0 υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Αντίστροφα έστω ότι $\lim_{z \to z_0} = c$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{αν } z \neq z_0 \\ c, & \text{αν } z = z_0 \end{cases}.$$

Τότε η g είναι συνεχής στο D και αναλυτική στο $D \setminus \{z_0\}$, άρα, από το θεώρημα 7.4, η g είναι αναλυτική στο D. Αφού είναι ίση με την f στον τρύπιο δίσκο, συμπεραίνουμε ότι το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία.

(2) Αν το z_0 είναι πόλος τάξης m τότε $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ για κάποια g αναλυτική στο D με $g(z_0) \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{z - z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) \neq 0.$$

Αντίστροφα, αν $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ τότε $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, άρα η $\frac{1}{f}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0. Επομένως αν της δώσουμε την τιμή 0 στο z_0 γίνεται αναλυτική στο D και το z_0 γίνεται ρίζα της. Συνεπώς το z_0 είναι πόλος τής f. Αν τώρα το $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$

είναι πεπερασμένο και μη μηδενικό, τότε το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία τής $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$. Επομένως αν θέσουμε $g(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$, η g γίνεται αναλυτική σ'ολόκληρο το δίσκο και $g(z_0) \neq 0$. Αλλά τότε

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m},$$

συνεπώς το z_0 είναι πόλος τάξης m τής f.

(3) Προκύπτει από τα (1) και (2).

□

Παραδείγματα.

- $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z^2}{z^2} = \lim_{w\to 0} \frac{\sin w}{w} = 1$. Άρα το 0 είναι επουσιώδης ανωμαλία τής $\frac{\sin z^2}{z^2}$.
- $\lim_{z\to 0} \left(z^2 \frac{\sin z}{z^3}\right) = 1 \neq 0$. Άρα το 0 είναι πόλος τάξης 2 τής $\frac{\sin z}{z^3}$.
- Το $\lim_{z\to 0} \sin \frac{1}{z}$ δεν υπάρχει γιατί το $\lim_{w\to\infty} \sin w$ δεν υπάρχει. Άρα το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία τής $\sin \frac{1}{z}$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Σύμφωνα με το θεώρημα τού Cauchy, το ολοκλήρωμα μιας αναλυτικής συνάρτησης f πάνω σ'ένα κλειστό μονοπάτι το εσωτερικό τού οποίου περιέχεται στο πεδίο ορισμού τής f είναι ίσο με μηδέν. Αν στο εσωτερικό τού μονοπατιού βρίσκονται ανωμαλίες τής f τότε το θεώρημα τού Cauchy δεν εφαρμόζεται. Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε μια τεχνική η οποία θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε τέτοιου είδους ολοκληρώματα. Έστω λοιπόν ότι το z_0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία τής f, και έστω

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

το ανάπτυγμα Laurent τής f. Ο συντελεστής a_{-1} ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** τής f στο z_0 και συμβολίζεται με $\mathrm{Res}\,(f, z_0)$. Από τις παρατηρήσεις μετά το θεώρημα 8.2 (εξίσωση 8.1) έχουμε ότι

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} f(w)\, dw,$$

για κάθε $r > 0$ αρκετά μικρό. Μέσω των ολοκληρωτικών υπολοίπων μπορούμε να υπολογίζουμε ολοκληρώματα κατά μήκος μονοπατιών που περικλείουν ανωμαλίες.

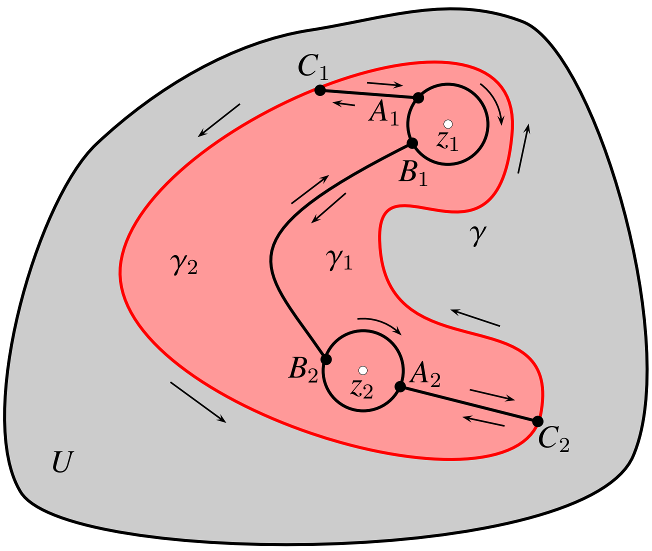
Θεώρημα 8.4 (Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων)**.** *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο, $z_1, z_2, \ldots, z_n \in U$ κάποια σημεία, και $f : U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γ είναι ένα κλειστό θετικά προσανατολισμένο μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε:*

- *Το εσωτερικό τού γ περιέχεται στο U.*
- *Τα $z_1, \ldots, z_n$ περιέχονται στο εσωτερικό τού γ.*

Τότε

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_k).$$

Απόδειξη. Για απλότητα δίνουμε την απόδειξη στην περίπτωση που έχουμε δυο ανωμαλίες z_1 και z_2. Η γενική περίπτωση είναι τελείως ανάλογη. Θεωρούμε δυο μικρούς κύκλους $C(z_1, r)$ και $C(z_2, r)$ στο εσωτερικό τού γ και τους συνδέουμε με ένα μονοπάτι B_1B_2. Επίσης τους συνδέουμε με το γ με τα ευθύγραμμα τμήματα $[A_1, C_1]$ και $[A_2, C_2]$ όπως στο σχήμα.



Προσέχουμε ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα να είναι κι'αυτά στο εσωτερικό τού γ. Δημιουργούνται έτσι δυο κλειστά μονοπάτια γ_1 και γ_2. Το γ_1 αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[A_2, C_2]$, το κομμάτι C_2C_1 τού γ διαγραφόμενο αριστερόστροφα, το ευθύγραμμο τμήμα $[C_1, A_1]$, το τόξο A_1B_1 διαγραφόμενο δεξιόστροφα, το μονοπάτι B_1B_2 και το τόξο B_2A_2 διαγραφόμενο δεξιόστροφα. Το γ_2 αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[A_1, C_1]$, το κομμάτι C_1C_2 τού γ διαγραφόμενο αριστερόστροφα, το ευθύγραμμο τμήμα $[C_2, A_2]$, το τόξο A_2B_2 διαγραφόμενο δεξιόστροφα, το μονοπάτι B_2B_1 και το τόξο B_1A_1 διαγραφόμενο δεξιόστροφα. Το εσωτερικό των γ_1 και γ_2 περιέχεται στο πεδίο ορισμού τής f, άρα από το θεώρημα τού Cauchy

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = &\int_{[A_2,C_2]} f(z)\,dz + \int_{C_2C_1} f(z)\,dz + \int_{[C_1,A_1]} f(z)\,dz \\ &+ \int_{A_1B_1} f(z)\,dz + \int_{B_1B_2} f(z)\,dz + \int_{B_2A_2} f(z)\,dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = &\int_{[A_1,C_1]} f(z)\,dz + \int_{C_1C_2} f(z)\,dz + \int_{[C_2,A_2]} f(z)\,dz \\ &+ \int_{A_2B_2} f(z)\,dz + \int_{B_2B_1} f(z)\,dz + \int_{B_1A_1} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \\ &= \left(\int_{C_1C_2} f(z)\,dz + \int_{C_2C_1} f(z)\,dz\right) \\ &+ \left(\int_{A_1B_1} f(z)\,dz + \int_{B_1A_1} f(z)\,dz\right) + \left(\int_{A_2B_2} f(z)\,dz + \int_{B_2A_2} f(z)\,dz\right) \\ &+ \left(\int_{[A_1,C_1]} f(z)\,dz + \int_{[C_1,A_1]} f(z)\,dz\right) + \left(\int_{[A_2,C_2]} f(z)\,dz + \int_{[C_2,A_2]} f(z)\,dz\right) \\ &+ \left(\int_{B_1B_2} f(z)\,dz + \int_{B_2B_1} f(z)\,dz\right).\end{aligned}$$

Το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στην πρώτη παρένθεση είναι ίσο με $\int_\gamma f(z)\,dz$ γιατί το γ αποτελείται από τα διαδοχικά μονοπάτια C_1C_2 και C_2C_1. Ομοίως η δεύτερη και η τρίτη παρένθεση είναι ίσες με $-\int_{C(z_1,r)} f(z)\,dz$ και $-\int_{C(z_2,r)} f(z)\,dz$ αντίστοιχα (τα αρνητικά πρόσημα προκύπτουν από το ότι οι κύκλοι είναι αρνητικά προσανατολισμένοι). Οι τρεις τελευταίες παρενθέσεις είναι ίσες με μηδέν, γιατί και στις τρεις τα ολοκληρώματα είναι αντίθετα αφού τα ευθύγραμμα τμήματα και το μονοπάτι που συνδέει τους δυο κύκλους διαγράφονται με αντίθετες φορές. Συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{C(z_1,r)} f(z)\,dz + \int_{C(z_2,r)} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,z_1) + \operatorname{Res}(f,z_2)\right).$$

□

Το ακόλουθο θεώρημα είναι χρήσιμο όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο σ'ένα πόλο.

Θεώρημα 8.5. *Αν το z_0 είναι πόλος τάξης m τής f, τότε*

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

Απόδειξη. Αφού το z_0 είναι πόλος τάξης m το ανάπτυγμα Laurent έχει τη μορφή

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Επομένως

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} a_n (z-z_0)^{n+m} + (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = g(z) + h(z).$$

Η g είναι πολυώνυμο βαθμού $m-1$. Ο συντελεστής τού μεγιστοβάθμιου όρου είναι a_{-1}. Έτσι αν παραγωγίσουμε την g διαδοχικά $m-1$ φορές θα πάρουμε $g^{(m-1)}(z) = a_{-1}(m-1)!$ για κάθε z. Απ'την άλλη το z_0 είναι ρίζα τάξης τουλάχιστο m τής h, άρα $h^{(m-1)}(z_0) = 0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] &= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(g^{(m-1)}(z) + h^{(m-1)}(z)\right)\\ &= a_{-1} + 0 = a_{-1} = \operatorname{Res}(f,z_0).\end{aligned}$$

□

Παραδείγματα.

- Το 0 είναι απλός πόλος τής $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, άρα

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}\left(z\frac{\sin z}{z^2}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1.$$

- Το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία τής $e^{\frac{1}{z}}$, επομένως το προηγούμενο θεώρημα δεν εφαρμόζεται. Για να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο, αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε σειρά Laurent

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

και παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του $\frac{1}{z}$ είναι 1. Άρα $\operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z}},0\right) = 1$.

Εφαρμογές στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων

Στην ενότητα αυτή θα δούμε πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$, όπου γ ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 2 θετικά προσανατολισμένος. Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ έχει μεμονωμένες ανωμαλίες στα σημεία που μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή στο i και στο $-i$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{1}{2i}, \quad \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = -\frac{1}{2i}.$$

Άρα, από το θεώρημα 8.3, και τα δυο σημεία είναι απλοί πόλοι. Έτσι, από το θεώρημα 8.5, έχουμε

$$\mathrm{Res}\,(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{1}{2i}, \quad \mathrm{Res}\,(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = -\frac{1}{2i}.$$

Συνεπώς από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων (θεώρημα 8.4)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i}\right) = 0.$$

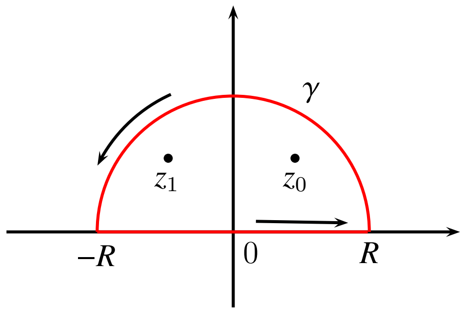
Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε (με μεθόδους Μιγαδικής Ανάλυσης!) το πραγματικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η f έχει απλούς πόλους στα σημεία που μηδενίζεται ο παρονομαστής δηλαδή στις 4 τέταρτες ρίζες τού -1:

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \quad k = 0,1,2,3.$$

Τώρα για $R > 0$ αρκετά μεγάλο, έστω γ το κλειστό μονοπάτι τού σχήματος, θετικά προσανατολισμένο.



Το γ περικλείει τούς πόλους z_0 και z_1, άρα από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\,(f,z_0) + \mathrm{Res}\,(f,z_1)\right).$$

Από το θεώρημα 8.5 έχουμε

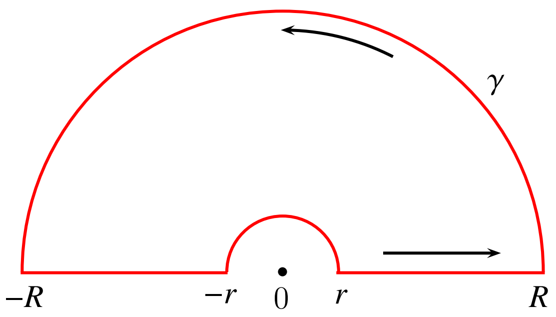
$$\mathrm{Res}\,(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} = \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Ομοίως

$$\mathrm{Res}\,(f,z_1) = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi i}{4}}.$$

Άρα
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi i}{4}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$
Αλλά
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz,$$
όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, είναι το ημικύκλιο. Από τον ορισμό τού επικαμπύλιου ολοκληρώματος, έχουμε
$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx,$$
$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{\gamma_R^2(t)}{1+\gamma_R^4(t)}\gamma_R'(t)\,dt = \int_0^\pi \frac{iR^3e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}\,dt.$$
Επομένως
$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx + \int_0^\pi \frac{iR^3e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$
Αν στείλουμε το R στο $+\infty$ στην παραπάνω ισότητα, το πρώτο ολοκλήρωμα τείνει (από τον ορισμό τού γενικευμένου ολοκληρώματος) στο $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$. Ενώ το δεύτερο
$$\left|\int_0^\pi \frac{iR^3e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}\,dt\right| \le \int_0^\pi \frac{R^3}{|1+R^4e^{it}|}\,dt \le \pi\frac{R^3}{R^4-1} \to 0.$$
Συμπεραίνουμε ότι
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$
Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί απ'ευθείας με μεθόδους Απειροστικού Λογισμού, αλλά οι πράξεις είναι πολύ πιο επίπονες.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ και το κλειστό μονοπάτι γ τού σχήματος.



Η f έχει μια ανωμαλία στο 0 η οποία δεν περιέχεται στο εσωτερικό τού γ, άρα από το θεώρημα τού Cauchy, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Έτσι αν διασπάσουμε το γ στις καμπύλες που το αποτελούν παίρνουμε
$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0,$$

όπου γ_r και γ_R το μικρό και το μεγάλο ημικύκλιο αντίστοιχα. Αφού η $\frac{\sin t}{t}$ είναι άρτια συνάρτηση και η $\frac{\cos t}{t}$ περιττή, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_{r}^{R} \frac{e^{it}}{t}\,dt &= \int_{-R}^{-r} \frac{\cos t}{t}\,dt + \int_{r}^{R} \frac{\cos t}{t}\,dt + i\int_{-R}^{-r} \frac{\sin t}{t}\,dt + i\int_{r}^{R} \frac{\sin t}{t}\,dt \\ &= 2i\int_{r}^{R} \frac{\sin t}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα

$$I_1 = 2i\int_{r}^{R} \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad I_2 = \int_{\gamma_r} f(z)\,dz, \quad I_3 = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz.$$

Τότε $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Αν στείλουμε το r στο 0 και το R στο $+\infty$, το I_1 τείνει στο $2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$. Για να εκτιμήσουμε το I_2 παρατηρούμε ότι

$$I_2 = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz + \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz - \pi i.$$

Αλλά η συνάρτηση $\frac{e^{iz}-1}{z}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο 0, άρα είναι φραγμένη κοντά στο μηδέν. Επομένως, από το θεώρημα 6.6

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz\right| \leq \pi r \max_{z\in\gamma_r^*}\left|\frac{e^{it}-1}{z}\right| \to 0,$$

καθώς $r \to 0$. Άρα $I_2 \to -\pi i$ καθώς $r \to 0$. Για να εκτιμήσουμε το I_3 παρατηρούμε ότι το $\sin t$ είναι συμμετρικό ως προς την $t = \frac{\pi}{2}$ και ότι $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ για κάθε t με $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$$|I_3| = \left| i\int_0^{\pi} e^{iRe^{it}}\,dt\right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\,dt \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2Rt}{\pi}}\,dt \to 0,$$

καθώς $R \to +\infty$. Έτσι, αν στη σχέση $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ πάρουμε όρια καθώς $r \to 0$ και $R \to +\infty$ θα έχουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό **δεν** μπορεί να υπολογιστεί με μεθόδους τού Απειροστικού Λογισμού.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t}\,dt$, όπου $a > 1$. Αν θέσουμε $w = e^{it}$ έχουμε

$$\cos t = \frac{1}{2}\,(w + \overline{w}) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right).$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{a + \cos t} = \frac{2w}{w^2 + 2aw + 1}.$$

Άρα

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}\,dt = -2i\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = -2i\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

όπου γ ο μοναδιαίος κύκλος, $z_1 = -a + \sqrt{a^2-1}$, $z_2 = -a - \sqrt{a^2-1}$. Αφού $a > 1$, το z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό τού γ και το z_2 στο εξωτερικό. Επομένως από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1\right).$$

Αλλά το z_1 είναι απλός πόλος, άρα

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1\right) = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$