ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2016
Παράδοση: Τετάρτη 2 Μαρτίου.

(**1**) Έστω Ω ανοιχτό σύνολο, συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα, και $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.

(i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\overline{f(\overline{z})}$ είναι ολόμορφη στο Ω.

(ii) Εάν το Ω είναι συνεκτικό και η f δεν είναι σταθερή στο Ω, δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\overline{f(z)}$ και $f(\overline{z})$ δεν είναι ολόμορφες στο Ω.

(**2**) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Δείξτε ότι εάν το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο κάποιας ευθείας ή κάποιου κύκλου, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

(**3**) (i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$ ικανοποιεί τις συνθήκες *Cauchy-Riemann* στο $0 \in \mathbb{C}$ όμως η f δεν είναι ολόμορφη στο 0.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση $u\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ όμως δεν έχει συζυγή αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(**4**) Έστω $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ αρμονική συνάρτηση. Δείξτε ότι η u έχει συζυγή αρμονική στο $\mathbb{R}^2$ και άρα υπάρχει $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε η $f = u + iv$ να είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$. Που χρησιμοποιήσατε ότι το πεδίο ορισμού της u είναι το $\mathbb{R}^2$;
(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι αν $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ τότε $\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b f_x(x,t)\,dt$.)

(**5**) (i) Έστω L ημιευθεία που ξεκινά από το $0 \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι υπάρχει ολόμορφη $f\colon \mathbb{C}\setminus L \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f'(z) = \frac{1}{z}$ για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus L$.

(ii) Έστω L όπως πριν και γ κλειστή καμπύλη που περιέχεται στο $\mathbb{C}\setminus L$. Δείξτε ότι $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$.

(iii) Χρησιμοποιώντας το (ii) υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{C_T} \frac{1}{z}\,dz$$

όπου C_T οποιαδήποτε θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια τετραγώνου με $0 \notin C_T$.

(**6**) Ένα παραλληλόγραμμο είναι *καλό* εάν τουλάχιστον μία από τις δύο πλευρές του έχει ακέραιο μήκος. Έστω ότι μπορούμε να πλακοστρώσουμε ένα παραλληλόγραμμο R με μικρότερα καλά παραλληλόγραμμα και πλευρές παράλληλες στους άξονες. Δείξτε ότι και το R είναι καλό παραλληλόγραμμο.
Υπόδειξη: $\int_a^b e^{2\pi i x}\,dx = 0$ αν και μόνο αν $b - a \in \mathbb{Z}$.

Στην άσκηση 5 παρακαλώ να **μην** χρησιμοποιήσετε τον ολοκληρωτικό τύπο του *Cauchy* ή το θεώρημα *Cauchy-Goursat*.