ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2016
Παράδοση: Τετάρτη 16 Μαρτίου.

---

(1) *(i)* Δείξτε ότι $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και ότι η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στον μοναδιαίο κύκλο.

(ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_C e^{\frac{1}{z}}\, dz$ όπου C κύκλος με κέντρο το 0 ή τρίγωνο το οποίο περιέχει το 0 στο εσωτερικό του.

---

(2) Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

Υπόδειξη: Κοιτάξτε παρόμοιο επιχείρημα στο βιβλίο.

---

(3) *(i)* Έστω $z_1, \ldots, z_k$ διαφορετικοί μιγαδικοί και $f\colon \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Έστω C κύκλος που περιέχει όλα τα σημεία $z_1, \ldots, z_k$ στο εσωτερικό του και για $i = 1, \ldots, k$ έστω C_i κύκλος που περιέχει μόνο το σημείο z_i στο εσωτερικό του. Δείξτε ότι

$$\int_C f = \int_{C_1} f + \cdots + \int_{C_k} f.$$

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^n - 1}\, dz = 0.$$

---

(4) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν θετικοί πραγματικοί a, M, R ώστε $|f(z)| \leq M|z|^a$ για $|z| > R$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $[a]$.

---

(5) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και μη σταθερή συνάρτηση.

(i) Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο τιμών των συναρτήσεων $Re(f)$ και $Im(f)$ είναι το $\mathbb{R}$ και ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $|f|$ είναι το $(0, +\infty)$ ή το $[0, +\infty)$.

---

(6) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}.$$

Υπόδειξη: Δεδομένων $n, k \in \mathbb{N}$ βρείτε $a, b \in \mathbb{N}$ ώστε $\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^a}{z^b}\, dz$.

Όλες οι καμπύλες θεωρούνται θετικά (αριστερόστροφα) προσανατολισμένες.