ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2016
Παράδοση: Τετάρτη 11 Μαΐου.

(**1**) Έστω $f\colon D \to D$ ολόμορφη συνάρτηση με δύο σταθερά σημεία. Δείξτε ότι $f(z) = z$ για κάθε $z \in D$.

(**2**) Έστω $f\colon D \to D$ ολόμορφη συνάρτηση. Θέτουμε $a = |f(0)|$. Δείξτε ότι

$$\frac{a-|z|}{1+a|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{a+|z|}{1-a|z|}$$

για κάθε $z \in D$.

(**3**) (i) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, μη σταθερή συνάρτηση, με πεπερασμένη τάξη μεγέθους. Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{C}$ ή το $\mathbb{C}$ μείον ένα σημείο.

(ii) Έστω p πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές το οποίο δεν είναι ταυτοτικά 0. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^z = p(z)$ έχει άπειρες λύσεις.

(**4**) Έστω $a_n \in D, n \in \mathbb{N}$, με $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$. Δείξτε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f\colon D \to D$ η οποία μηδενίζεται στα $a_n, n \in \mathbb{N}$, και πουθενά αλλού.

Υπόδειξη: $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1-\overline{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n}$.

(**5**) (i) Έστω $f\colon D \to D$ ολόμορφη μη σταθερή συνάρτηση. Εάν $a_n \in D, n \in \mathbb{N}$, είναι τα μηδενικά της f, δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$.

(ii) Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) > 0\}$ και $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, φραγμένη, και μη σταθερή συνάρτηση. Εάν $a_n > 1, n \in \mathbb{N}$, είναι μηδενικά της f, δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$.

(**6**) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^2} = 0$$

έχει άπειρες λύσεις.

Με D συμβολίζουμε τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο.