

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2013

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Δευτέρα 10 Φεβρουαρίου.

(1) (2 μονάδες) Έστω $T: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ άρρητη στροφή με το μέτρο *Haar*. Δείξτε ότι η διαμέριση $\mathcal{P} = \{[0, 1/2), [1/2, 1)\}$ είναι *T-generating*.

(2) (2 μονάδες) Δείξτε ότι κάθε ρητή στροφή $T: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ με το μέτρο *Haar* έχει εντροπία μηδέν όμως δεν έχει πεπερασμένη *T-generating* διαμέριση.

(3) (2 μονάδες) Έστω $X = [0, 1]^{\mathbb{Z}}$ με το μέτρο γινόμενο $\prod_{i=-\infty}^{+\infty} m_{[0,1]}$, όπου $m_{[0,1]}$ το μέτρο *Lebesgue* στο $[0, 1]$, και τον μετασχηματισμό $(T_{sh}x)(i) = x(i+1)$. Δείξτε ότι η εντροπία του συστήματος είναι $+\infty$. Υπάρχει πεπερασμένη *T-generating* διαμέριση;

(4) (2 μονάδες) Βρείτε παράδειγμα δύο εργοδικών αντιστρέψιμων δυναμικών συστημάτων τα οποία έχουν την ίδια εντροπία, είναι θετική, όμως τα συστήματα δεν είναι ισόμορφα.

(5) (2 μονάδες) (i) Έστω $T_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ο μετασχηματισμός $T_2x = 2x \pmod{1}$ με το μέτρο *Haar*. Βρείτε μία (μονόπλευρη) *T₂-generating* διαμέριση και υπολογίστε την εντροπία του συστήματος.

(ii) Κάντε το ίδιο για τον μετασχηματισμό $T_3x = 3x \pmod{1}$ και αποδείξτε ότι τα συστήματα (\mathbb{T}, T_2) και (\mathbb{T}, T_3) δεν είναι ισόμορφα.

(6) (2 μονάδες) Έστω $\mathcal{P} = \{[0, 1/3), [1/3, 1)\}$ διαμέριση του \mathbb{T} . Για $x \in \mathbb{T}$ έστω $P_n(x)$ το κομμάτι της διαμέρισης $\bigvee_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}\mathcal{P}$ στο οποίο ανήκει το x , όπου T_2 όπως στην προηγούμενη άσκηση. Δείξτε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\log(m_{\mathbb{T}}(P_n(x)))}{n} = a$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$.
