

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Τρίτη 24 Οκτωβρίου.

(1) (1.5 μονάδες) Έστω $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την συνάρτηση $f^{(n)}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ με τύπο $f^{(n)}(x) = f(x) + f(x + \alpha) + \dots + f(x + (n-1)\alpha)$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|n\alpha\| + \|f^{(n)}(x)\| \leq \varepsilon$, όπου $\|x\|$ η απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο.¹

(2) (1.5 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα και $A \in \mathcal{B}$ σύνολο με $\mu(A) > 0$. Για $x \in X$ ορίζουμε το σύνολο

$$\Lambda_x = \{n \in \mathbb{N}: T^n x \in A\}.$$

Δείξτε ότι $\mu(\{x \in A: \bar{d}(\Lambda_x) > 0\}) > 0$.

(3) (1.5 μονάδες) Έστω

$$R = \{n \in \mathbb{N}: \{n\sqrt{2}\} \in [1/4, 3/4]\}.$$

Δείξτε ότι $R \cap (m\mathbb{N}) \neq \emptyset$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ όμως το σύνολο R δεν είναι σύνολο επαναφοράς.^{2 3}

(4) (1.5 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα και $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} f(T^n x) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in X$. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για την f ;

(5) (1.5 μονάδες) Έστω R σύνολο ακεραίων το οποίο περιέχει οσοδήποτε μεγάλες αριθμητικές προόδους που ξεκινούν από το μηδέν (δηλαδή για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n, 2n, \dots, kn \in R$). Δείξτε ότι το R είναι σύνολο επαναφοράς.

(6) (1.5 μονάδες) Έστω $a_1, \dots, a_\ell \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Δείξτε ότι υπάρχει $N_k \rightarrow \infty$ (X, \mathcal{B}, μ, T) $f_1, \dots, f_\ell \in L^\infty(\mu)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} a_1(n + n_1) \cdots a_\ell(n + n_\ell) = \int T^{n_1} f_1 \cdots T^{n_\ell} f_\ell d\mu$$

$n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$.

(7) (1.5 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα και $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$R = \{r \in \mathbb{N}: \mu(A \cap T^{-r}A) > 0\}$$

έχει φραγμένα κενά, δηλαδή, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $R \cap \{i, i+1, \dots, i+k\} \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

¹Θεωρήστε κατάλληλο δυναμικό σύστημα στον \mathbb{T}^2 .

²Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι για α άρρητο το σύνολο $\{\{n\alpha\}: n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

³Υπενθυμίζω, το R είναι σύνολο επαναφοράς αν για κάθε δυναμικό σύστημα (X, \mathcal{B}, μ, T) και $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ υπάρχει $r \in R$, $r \neq 0$, ώστε $\mu(A \cap T^{-r}A) > 0$.