ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Τελικό Διαγώνισμα - Εαρινό Εξάμηνο 2024

Επιτρέπεται μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (4 μονάδες) (**i**) Για ποιές τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ο μετασχηματισμός $T\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ με τύπο

$$Tx = \{\alpha x + \beta\}$$

είναι καλά ορισμένος και διατηρεί το μέτρο $m_{\mathbb{T}}$; Για ποιές τιμές είναι εργοδικός; Για ποιές τιμές είναι *weak mixing*; (Δεν ζητάω απόδειξη.)

(**ii**) Έστω $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι τα παρακάτω όρια υπάρχουν σχεδόν παντού ως προς το μέτρο *Lebesgue* (μπορεί όμως να είναι $+\infty$) και υπολογίστε τα

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\{2^n x\}}, \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \log(\{x + n\alpha\}).$$

($\{x\}$ είναι το κλασματικό μέρος του πραγματικού x.)
(**iii**) Έστω $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $f \in L^1(m_{\mathbb{T}})$ (1-περιοδική συνάρτηση). Δείξτε ότι το παρακάτω όριο υπάρχει (x, y)-σχεδόν παντού ως προς το μέτρο $m_{\mathbb{T}^2}$ και υπολογίστε το

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(y + nx + n^2\alpha).$$

(**2**) (2 μονάδες) Έστω $Tx = 2x \pmod 1$ και $f, g, h \in L^\infty(m_{\mathbb{T}})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int f \cdot T^n g \cdot T^{2n} h \, dm_{\mathbb{T}} = \int f \, dm_{\mathbb{T}} \cdot \int g \, dm_{\mathbb{T}} \cdot \int h \, dm_{\mathbb{T}}.$$

Δείξτε επίσης ότι **δεν** ισχύει το ίδιο εάν $Tx = x + \alpha \pmod 1$ και $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(**3**) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι εάν το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ είναι *weak-mixing*, τότε για κάθε $A, B, C \in \mathcal{X}$ με θετικό μέτρο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\mu(A \cap T^{-n}B) \cdot \mu(A \cap T^{-n}C) > 0.$$

Ισχύει το ίδιο εάν το σύστημα είναι απλά εργοδικό;

(**4**) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι εάν το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ είναι *strong mixing*, τότε για κάθε $A \in \mathcal{X}$ με $\mu(A) > 0$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων (n_k), ισχύει ότι

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-n_k} A\Big) = 1.$$

(**5**) (2 μονάδες) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τα ψηφία του $x \in [0, 1)$ στην ανάλυση του σε συνεχή κλάσματα. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in [0, 1)$ (ως προς το μέτρο *Lebesgue*) ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{k(k+2)}\Big)^{\frac{\log k}{\log 2}}.$$
