ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτέμβρη 2024

Επιτρέπεται μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (3 μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι εάν R σύνολο επαναφοράς και $r \in \mathbb{N}$, τότε και το σύνολο $R \cap (r\mathbb{N})$ είναι σύνολο επαναφοράς.

(**ii**) Δείξτε ότι το σύνολο $\{4^n - 4^m \colon m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$ είναι σύνολο επαναφοράς, όμως το σύνολο $\{4^n + 4^m \colon m, n \in \mathbb{N}\}$ **δεν** είναι σύνολο επαναφοράς.

(**2**) (2.5 μονάδες) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $T \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ μετασχηματισμός με τύπο

$$T(x, y) = (x + \alpha, y + x) \pmod 1.$$

(**i**) Δείξτε ότι εάν $\alpha \in \mathbb{Q}$ το σύστημα $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ **δεν** είναι εργοδικό.

(**ii**) Δείξτε ότι εάν $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ το σύστημα $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ είναι εργοδικό. Είναι *weak-mixing*;

(**3**) (2.5 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ καθολικά εργοδικό δυναμικό σύστημα, δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύστημα $(X, \mathcal{X}, \mu, T^k)$ είναι εργοδικό.

(**i**) Δείξτε ότι για κάθε $f \in L^2(\mu)$ έχουμε

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T^{n^2} x) \to^{L^2(\mu)} \int f \, d\mu.$$

(**ii**) Εάν $A \in \mathcal{X}$ με $\mu(A) > 0$, δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\bar{d}(n \in \mathbb{N} \colon T^{n^2} x \in A) > 0.$$

(**4**) (3 μονάδες) (**i**) Έστω $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ *weak-mixing* δυναμικό σύστημα και $(Y, \mathcal{Y}, \nu, S)$ εργοδικό δυναμικό σύστημα. Δείξτε ότι το σύστημα γινόμενο $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mu \times \nu, T \times S)$ είναι εργοδικό.

(**ii**) Έστω $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $T \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ μετασχηματισμός με τύπο

$$T(x, y) = (x + \alpha, 2y) \pmod 1.$$

Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ είναι εργοδικό.

(**iii**) Έστω $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $f \in L^1(m_{\mathbb{T}})$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n \alpha} f(2^n x) = 0.$$
