Εισαγωγή στην Εργοδική Θεωρία

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2024

(**1**) Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ όπου $T\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ δίνεται από τον τύπο

$$T(x,y) = (2x+\alpha, 2x+\beta) \pmod 1,$$

για κάποια $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, είναι *weak mixing*.

(**2**) Έστω $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ *weak mixing* δυναμικό σύστημα. Δείξτε ότι για κάθε $f \in L^2(\mu)$ έχουμε

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{n^2} f \to^{L^2(\mu)} \int f\, d\mu.$$

Υπόδειξη: Φασματικό θεώρημα ή vdC.

(**3**) Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ είναι *weak mixing*, τότε για κάθε ακολουθία θετικών ακεραίων (n_k) με θετική πυκνότητα, και κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$, έχουμε

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-n_k} A\Big) = 1.$$

(**4**) Δείξτε ότι εάν το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ είναι *weak mixing* τότε για κάθε $f, g \in L^\infty(\mu)$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f \cdot T^{2n} g = \int f\, d\mu \cdot \int g\, d\mu$$

όπου η σύγκλιση λαμβάνει χώρα στον $L^2(\mu)$.

Υπόδειξη: vdC.

(**5**) Δείξτε ότι εάν το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ είναι *weak mixing* τότε για κάθε $A, B, C \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \big|\mu(A \cap T^{-n}B \cap T^{-2n}C) - \mu(A)\cdot\mu(B)\cdot\mu(C)\big| = 0.$$

(**6**) Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ είναι *weak mixing* αν και μόνο αν για όλα τα σύνολα $A, B, C \in \mathcal{B}$ με θετικό μέτρο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(A \cap T^{-n}B \cap T^{-2n}C) > 0.$$
