

(1) Δείξτε ότι ο δυικοί χώροι  $(c_0)^*$  και  $(c)^*$  είναι ισομετρικά ισόμορφοι με τον  $\ell_1$ .

(2) (i) Έστω  $(X, \|\cdot\|)$  απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει **μη** φραγμένος γραμμικός τελεστής  $T: X \rightarrow X$  ο οποίος είναι  $1 - 1$  και επί.

(ii) Έστω  $(X, \|\cdot\|)$  απειροδιάστατος χώρος *Banach*. Δείξτε ότι υπάρχει πλήρης νόρμα στον χώρο  $X$  η οποία δεν είναι ισοδύναμη με την  $\|\cdot\|$ .

(Υπόδειξη:  $\|x\|' = \|Tx\|$ ,  $T$  όπως στο (i).)

(3) Δώστε μία δεύτερη απόδειξη του ερωτήματος 5 (i) του φυλλαδίου 2 χρησιμοποιώντας την αρχή ομοιόμορφου φράγματος. (Υπόδειξη: Για  $k \in \mathbb{N}$  ορίστε  $T_k x = \xi_k$ , όπου  $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .)

(4) Έστω  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία σε χώρο με νόρμα  $(X, \|\cdot\|)$  ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(x_n)| < \infty$$

για κάθε  $F \in X^*$ . Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά  $C$  ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(x_n)| \leq C \|F\|$$

για κάθε  $F \in X^*$ . (Υπόδειξη: Για  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{\pm 1\}$ , ορίστε  $T_{m, \varepsilon_i} F = \sum_{n=1}^m \varepsilon_n F(x_n)$ .)

(5) Έστω  $(X, \|\cdot\|)$  χώρος *Banach* και  $T: X \rightarrow X$  φραγμένος τελεστής ώστε  $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < \infty$  ( $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$ ). Για  $y \in X$  ορίζουμε τον μετασχηματισμό  $S_y(x) = y + Tx$ . Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in X$  ώστε  $S_y(x_0) = x_0$ .

(Υπόδειξη: Για την ύπαρξη θεωρείστε το  $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n x$  για κατάλληλο  $x$ .)

(6) Έστω  $K \in [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση και  $M = \|K\|_{\infty}$ . Ορίζουμε τον τελεστή  $T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  με τύπο

$$(Tf)(t) = \int_0^t K(s, t)f(s) ds, \quad t \in [0, 1],$$

όπου  $f \in C[0, 1]$ . (Πάρτε ως δεδομένο ότι  $Tf \in C[0, 1]$ .)

(i) Για  $n = 1, 2, \dots$  δείξτε ότι ο τελεστής  $T^n$  είναι φραγμένος και  $\|T^n\| \leq \frac{M^n}{n!}$ .

(Υπόδειξη: Δείξτε επαγωγικά ότι  $|(T^n f)(t)| \leq \frac{M^n}{n!} \|f\|_{\infty} t^n$  για κάθε  $t \in [0, 1]$ .)

(ii) Αν  $g \in C[0, 1]$  δείξτε ότι υπάρχει μοναδική  $f \in C[0, 1]$  ώστε  $f(t) = g(t) + \int_0^t K(s, t)f(s) ds$  για κάθε  $t \in [0, 1]$ . (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την άσκηση 5 για κατάλληλο τελεστή.)