

(1) Έστω H διαχωρίσιμος χώρος *Hilbert* με ορθοκανονική βάση (e_n) .

(i) Έστω $T: H \rightarrow H$ φραγμένος γ.τ. ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$. Δείξτε ότι για κάθε άλλη ορθοκανονική βάση (u_n) ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|^2 < +\infty$$

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει μη φραγμένος γ.τ. $T: H \rightarrow H$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$.

(2) Έστω X χώρος *Banach* και $T: X \rightarrow X$ φραγμένος γ.τ.. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > \|T\|$ ο τελεστής $T - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος και $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$.

(3) Έστω H χώρος *Hilbert* και $T: H \rightarrow H$ συμπαγής τελεστής.

(i) Δείξτε ότι ο τελεστής T^* είναι συμπαγής (υποθέστε για διευκόλυνση ότι είναι φυσιολογικός).

(ii) Δείξτε ότι ο τελεστής T^*T είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής.

(4) Έστω H χώρος *Hilbert*, (e_n) και (u_n) ορθοκανονικά σύνολα, και (a_n) ακολουθία πραγματικών με $a_n \rightarrow 0$. Δείξτε ότι ο τελεστής

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle u_n, \quad x \in X,$$

είναι καλά ορισμένος και συμπαγής.

(5) Έστω H διαχωρίσιμος χώρος *Hilbert* και $T: H \rightarrow H$ συμπαγής τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχουν ορθοκανονικά σύνολα (e_n) και (u_n) , και ακολουθία πραγματικών (a_n) με $a_n \rightarrow 0$, ώστε

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle u_n, \quad x \in X.$$

(Υπόδειξη. Δείξτε ότι ο T^*T έχει ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και ορίστε $u_n = Te_n / \|Te_n\|$ αν $Te_n \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$.)

(6) Έστω H χώρος *Hilbert* και $T: H \rightarrow H$ συμπαγής τελεστής. Δείξτε ότι αν $x_n \xrightarrow{w} x$ τότε $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$. Συμπεράνετε ότι αν (e_n) ορθοκανονική ακολουθία, τότε $Te_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.