

(1) Έστω μ το μέτρο *Lebesgue* στο $[0, 1]$ και $Y = \{f \in L^1(\mu) : \int_0^1 xf(x) dx = 0\}$.

(i) Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του $L^1(\mu)$.

(ii) Δείξτε ότι $\|f - 1\|_{L^1(\mu)} > \frac{1}{2}$ για κάθε $f \in Y$.

(iii) Δείξτε ότι $d(1, Y) = \frac{1}{2}$. (Υπόδειξη. $f_n = 1 - \frac{n^2}{2n-1} \cdot \mathbf{1}_{[1-\frac{1}{n}, 1]}$)

(2) (i) Έστω $f_n \in C[0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \rightarrow^w 0$ αν και μόνο αν $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ και $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

(ii) Έστω $x_n = (\xi_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $x_n \rightarrow^w 0$ αν και μόνο αν $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_2 < \infty$ και $\xi_{nk} \rightarrow 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(3) Έστω X αυτοπαθής χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$.

(i) Εάν $x_n \rightarrow^w 0$, δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου κάθε y_n είναι πεπερασμένος κυρτός συνδυασμός των $x_n, n \in \mathbb{N}$, ώστε $\|y_n\| \rightarrow 0$.

(ii) Έστω $\|\cdot\|'$ μία άλλη νόρμα στον X τέτοια ώστε $\|x\|' \leq \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι εάν $\|x_n\| \leq 1$ και $\|x_n\|' \rightarrow 0$ τότε $f(x_n) \rightarrow 0$ για κάθε f φραγμένο γ.σ. στον $(X, \|\cdot\|)$.

(4) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η απεικόνιση $x \mapsto \|x\|$ δεν είναι w -συνεχής σε κανένα σημείο του X .

(5) (i) Δείξτε ότι $ex(B_{\ell_2}) = \{x \in \ell_2 : \|x\|_2 = 1\}$.

(ii) Δείξτε ότι $ex(B_{\ell_1}) = \{e_n, -e_n, n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) Τι αναπαράσταση παίρνουμε εφαρμόζοντας την ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος *Krein-Milman* στους χώρους ℓ_1 και ℓ_2 ;

(6) Έστω λ το μέτρο *Lebesgue* στο $[0, 1]$.

(i) Δείξτε ότι

$$\mu_n = \frac{\delta_0 + \delta_{\frac{1}{n}} + \cdots + \delta_{\frac{n-1}{n}}}{n} \rightarrow^{w^*} \lambda.$$

(ii) Αν α άρρητος δείξτε ότι $(\{t\})$ είναι το κλασματικό μέρος του t

$$\nu_n = \frac{\delta_0 + \delta_{\{\alpha\}} + \cdots + \delta_{\{(n-1)\alpha\}}}{n} \rightarrow^{w^*} \lambda.$$

(iii) Δείξτε ότι οι ακολουθίες $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν έχουν ασθενώς συγκλίνουσες υποακολουθίες.