ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

Πρόοδος-Εαρινό εξάμηνο 2022

Διάρκεια 4 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (1.5 Μονάδες) Έστω $f\colon \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Στα παρακάτω δώστε απάντηση ΝΑΙ/ΟΧΙ και σύντομη αιτιολόγηση.

(i) Εάν το f είναι μηδέν στον c_{00}, είναι υποχρεωτικά μηδέν στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$;

(ii) Εάν το f είναι φραγμένο στον c_{00}, είναι υποχρεωτικά φραγμένο στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$;

(iii) Εάν το f είναι φραγμένο στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$ και μηδέν στον c_{00}, είναι υποχρεωτικά μηδέν στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$;

(**2**) (2.5 Μονάδες) (i) Υπάρχει πλήρης νόρμα στον $\ell_1(\mathbb{N})$ η οποία δεν είναι ισοδύναμη με τη νόρμα $\|\cdot\|_1$;

(ii) Δείξτε ότι κάθε πλήρης νόρμα στον $\ell_1(\mathbb{N})$ για την οποία σύγκλιση στο 0 έχει ως συνέπεια την κατά σημείο σύγκλιση στο 0, είναι ισοδύναμη με τη νόρμα $\|\cdot\|_1$.

(**3**) (2 Μονάδες) Για $g \in L^1[0,1]$ ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές $T_g\colon L^\infty[0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$T_g(f) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx, \quad f \in L^\infty[0,1].$$

(i) Δείξτε ότι το T_g είναι φραγμένο και $\|T_g\| = \|g\|_{L^1[0,1]}$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο του $(L^\infty[0,1])^*$ το οποίο δεν είναι της μορφής T_g.

(**4**) (2.5 Μονάδες) (i) Σε χώρο *Hilbert* H δείξτε ότι εαν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n\,e_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty$.

(ii) Σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο X δείξτε ότι εαν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική βάση στον X, τότε για κάθε $x, y \in X$ έχουμε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n\rangle \cdot \langle y, e_n\rangle.$$

(**5**) (2.5 Μονάδες) (i) Σε χώρο *Hilbert* H, δείξτε ότι εάν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον H τέτοια ώστε για κάθε $x \in H$ η $(\langle x_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

(ii) Σε χώρο με νόρμα X, δείξτε ότι εάν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X τέτοια ώστε για κάθε $f \in X^*$ η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.
