**ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)**

**Τελική εξέταση-Ιούνιος 2026-Εξεταστής: Νίκος Φραντζικινάκης**

Διάρκεια 4 ώρες. Καλή επιτυχία!!

---

(**1**) (2 Μονάδες) (*i*) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος με πεπερασμένο μέτρο και $f\colon X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν $\int |f \cdot g| \, d\mu < \infty$ για κάθε $g \in L^2(\mu)$ τότε $f \in L^2(\mu)$.

(*ii*) Έστω $Y$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $C[0,1]$ με $Y \neq C[0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει προσημασμένο μέτρο *Borel* $\mu$ στο $[0,1]$, με $0 < |\mu|([0,1]) < \infty$, τέτοιο ώστε $\int f \, d\mu = 0$ για κάθε $f \in Y$.

---

(**2**) (2 Μονάδες) Έστω $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ γραμμικός τελεστής ώστε

$$T(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_2/2, \xi_3/3, \ldots, \xi_{n+1}/(n+1), \ldots).$$

(*i*) Δείξτε ότι ο $T$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με σύνολο τιμών πυκνό, όχι όμως κλειστό, υποσύνολο του $\ell^2(\mathbb{N})$.

(*ii*) Δείξτε ότι ο $T$ είναι συμπαγής τελεστής.

(*iii*) Δείξτε ότι ο $T$ δεν έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές.

---

(**3**) (3 Μονάδες) Έστω $H$ χώρος *Hilbert*, έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική βάση του $H$, και έστω $H_N = span\{e_1, \ldots, e_N\}$.

(*i*) Είναι ο τελεστής ορθογώνιας προβολής $P_N\colon H \to H_N$ φραγμένος; Είναι συμπαγής; Δώστε ένα κλειστό τύπο για τον $P_N$.

(*ii*) Εάν $I\colon H \to H$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής και $K \subset H$ συμπαγές, δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in K} \|(I - P_N)x\| = 0.$$

(*iii*) Δείξτε ότι το συμπέρασμα του (*ii*) δεν ισχύει αν το σύνολο $K$ είναι απλά φραγμένο.

(*iv*) Εάν $T\colon H \to H$ συμπαγής τελεστής και $T_N = P_N \circ T$, δείξτε ότι $\lim_{N\to\infty} \|T - T_N\| = 0$.

---

(**4**) (2 Μονάδες) Έστω $x_n = (\xi_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, $n \in \mathbb{N}$.

(*i*) Δείξτε ότι $x_n \to^{w^*} 0$ αν και μόνο αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\ell_1} < \infty$ και $\lim_{n\to\infty} \xi_{nk} = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Δείξτε ότι $e_n \to^{w^*} 0$ όμως $e_n \not\to^{w} 0$.

---

(**5**) (2 Μονάδες) Με $\mathcal{M}_1([0,1])$ συμβολίζουμε το (κυρτό) σύνολο όλων των μέτρων πιθανότητας στο $[0,1]$.

(*i*) Δείξτε ότι $ex(\mathcal{M}_1([0,1])) = \{\delta_x, x \in [0,1]\}$, όπου $\delta_x$ το μέτρο *Dirac*.

(*ii*) Δείξτε ότι για κάθε $\mu \in \mathcal{M}_1([0,1])$ υπάρχει δίκτυο $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, όπου $\mu_\lambda \in \mathcal{M}_1([0,1])$ μέτρα πιθανότητας με φορέα πεπερασμένο σύνολο, ώστε $\mu_\lambda \to^{w^*} \mu$.

---