

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2026

Παράδοση: Πέμπτη 19 Φεβρουαρίου.

(1) Θεωρούμε την μετρική $d(x, y) = |x - y|$ στο σύνολο των ρητών \mathbb{Q} .

(i) Είναι ο μετρικός χώρος (\mathbb{Q}, d) πλήρης; Είναι το $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ συμπαγές υποσύνολο του (\mathbb{Q}, d) ;

(ii) Έστω (B_n) (μη κενές) κλειστές μπάλες στον (\mathbb{Q}, d) με $B_{n+1} \subset B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$;

(2) Έστω μετρική d σε γραμμικό χώρο X . Δείξτε ότι η d επάγεται από κάποια νόρμα στον X (δηλαδή υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στον X ώστε $d(x, y) = \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in X$) αν και μόνο αν

(i) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, και

(ii) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

(3) Έστω $x = (x_n)$ ακολουθία μιγαδικών και $p, r \in \mathbb{R}$ με $1 \leq r < s \leq \infty$.

(i) Δείξτε ότι $\|x\|_s \leq \|x\|_r$.

(Υπόδειξη. Ανάγετε στην περίπτωση $r = 1$ και δείξτε ότι $|x|^s + |y|^s \leq (|x| + |y|)^s$.)

(ii) Δείξτε ότι ο ℓ_r είναι γνήσιο υποσύνολο του ℓ_s .

(4) (i) Δείξτε ότι ο c_0 είναι γνήσιο υπερσύνολο του $\bigcup_{p=1}^{\infty} \ell_p$.

(ii) Έστω $x \in \ell_p$ για κάποιο $p \in [1, \infty)$. Δείξτε ότι $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_{\infty}$.

(5) Έστω (X, \mathcal{B}, μ) χώρος μέτρου και $r, s \in \mathbb{R}$ με $1 \leq r \leq s \leq \infty$.

(i) Δείξτε ότι $L_r(\mu) \cap L_{\infty}(\mu) \subset L_s(\mu)$.

(ii) Δείξτε ότι αν $\mu(X) < \infty$, τότε $L_s(\mu) \subset L_r(\mu)$.

(6) Έστω (X, \mathcal{B}, μ) χώρος μέτρου και $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμη.

(i) Αν $\mu(X) < \infty$, δείξτε ότι $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(\mu)} = \|f\|_{L_{\infty}(\mu)}$ (μπορεί $= +\infty$).

(ii) Αν $f \in L_r(\mu) \cap L_{\infty}(\mu)$ για κάποιο $r \geq 1$, δείξτε ότι $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(\mu)} = \|f\|_{L_{\infty}(\mu)}$.
