ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2026
Παράδοση: Πέμπτη 5 Μαρτίου.

(**1**) Δείξτε ότι ο χώρος c είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞ και ο $C_0(\mathbb{R})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $B(\mathbb{R})$ (με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$).

(**2**) (i) Δείξτε ότι ο χώρος $(c, \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος. Κατασκευάστε μία βάση *Schauder*. Έχει αριθμήσιμη βάση *Hamel*;

(ii) Δείξτε ότι ο χώρος $(B[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος. Έχει βάση *Schauder*;

(**3**) Έστω $C^1[0,1]$ ο χώρος των συνεχών παραγωγίσιμων $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με νόρμα

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

Δείξτε ότι ο χώρος $(C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1})$ είναι *Banach*.

(**4**) (i) Δείξτε ότι δεν υπάρχει πλήρης νόρμα $\|\cdot\|$ στον χώρο ℓ_∞ με την παρακάτω ιδιότητα: 'Για $x_n \in \ell_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, με $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_\infty < \infty$ έχουμε: $x_n \to^{\|\cdot\|} x$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} \xi_{ni} = \xi_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ όπου $x_n = (\xi_{ni}), x = (\xi_i) \in \ell_\infty$.'

(Υπόδειξη: Συμπάγεια των $B_k = \{x\colon\ \|x\|_\infty \leq k\}$ με την $\|\cdot\|$ και *Baire*.)

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει (μη πλήρης) νόρμα $\|\cdot\|$ στον χώρο ℓ_∞ με την προηγούμενη ιδιότητα.

(**5**) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(i) Δείξτε ότι η μοναδιαία μπάλα του X περιέχει άπειρες ξένες ανα δύο μπάλες ακτίνας $1/4$.

(ii) Δείξτε ότι δεν υπάρχει μέτρο *Borel* μ στον X ώστε (α) $\mu(A + x) = \mu(A)$ για κάθε A *Borel* και $x \in X$, και (β) $0 < \mu(O) < \infty$ για κάθε φραγμένο ανοιχτό O.

(**6**) Υπάρχει άπειρες φορές ποαραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $span\{f^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στον $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$?
