ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2026
Παράδοση: Πέμπτη 19 Μαρτίου.

---

(1) (i) Έστω $T\colon \ell_\infty \to C[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ τελεστής με τύπο

$$T((\xi_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x^k.$$

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. (Θεωρούμε την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ στους αντίστοιχους χώρους.)

(ii) Έστω $T\colon C^1[0,1] \to C[0,1]$ τελεστής με τύπο

$$Tf = f'.$$

Δείξτε ότι ο T *δεν* είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. (Θεωρούμε την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ στους αντίστοιχους χώρους.)

---

(2) (i) Έστω $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα και $T\colon X \to Y$ γραμμικός τελεστής ώστε η ακολουθία $(\|Tx_n\|_Y)$ είναι φραγμένη εαν $x_n \to^{\|\cdot\|_X} 0$. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

(ii) Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $C[0,1]$ με νόρμα $\|f\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt)^{\frac{1}{2}}$. Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές $F\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$F(f) = \int_0^1 t \cdot f(t) \, dt.$$

Δείξτε ότι το F είναι φραγμένο και ότι $\|F\| = 1/\sqrt{3}$.

---

(3) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά C (εξαρτάται από το n μόνο) ώστε για κάθε πολυώνυμο $P\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ βαθμού το πολύ n έχουμε $\|P'\|_\infty \leq C\,\|P\|_\infty$.

---

(4) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει μη κενό διάστημα (a,b) ώστε η f είναι φραγμένη σε ένα πυκνό υποσύνολο του (a,b).

---

(5) Έστω $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f(n\alpha) = 0$ για κάθε $\alpha > 0$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Δείξτε επίσης ότι η υπόθεση συνέχειας δεν μπορεί να παραλειφθεί.

---

(6) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{(n_x)}(x) = 0$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε (μη τετριμμένο) διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ υπάρχει (μη τετριμμένο) υποδιάστημα $J \subset I$ ώστε ο περιορισμός της f στο J είναι πολυώνυμο.

$(ii)^*$ Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο.
