ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2026
Παράδοση: Τρίτη 21 Απριλίου.

(**1**) (i) Έστω X γραμμικός χώρος ο οποίος είναι πλήρης ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι $\|x_n\|_2 \to 0$ εάν $\|x_n\|_1 \to 0$. Δείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(ii) Δείξτε ότι κάθε πλήρης νόρμα στον $B(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη$\}$ για την οποία σύγκλιση στο 0 συνεπάγεται κατά σημείο σύγκλιση στο 0, είναι ισοδύναμη με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

(**2**) Έστω $T : C[0,1] \to C[0,1]$ (με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$) γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε εάν $f_n \in C[0,1]$ και $\|f_n\|_\infty \to 0$ τότε $(Tf_n)(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ (προσοχή δεν υποθέτουμε ότι $\|Tf_n\|_\infty \to 0$). Να δειχθεί ότι ο τελεστής T είναι φραγμένος.

(**3**) Έστω Y κλειστός υπόχωρος του $L^1[0,2]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L^1[0,1]$ υπάρχει $g \in Y$ τέτοια ώστε $g|_{[0,1]} = f$. Δείξτε ότι υπάρχει $C > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα: Για κάθε $f \in L^1[0,1]$ υπάρχει $g \in Y$ ώστε $g|_{[0,1]} = f$ και $\|g\|_{L^1[0,2]} \leq C \|f\|_{L^1[0,1]}$.

(**4**) Αποδείξτε ότι υπάρχει ή δείξτε ότι δεν υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ το οποίο ικανοποιεί όλα τα παρακάτω

(i) $f(1) = 1$,

(ii) $f((x_{n+k})) = f((x_n))$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $(x_n) \in \ell^\infty$,

(iii) $f((x_n y_n)) = f((x_n))\, f((y_n))$ για κάθε $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$.

(**5**) Έστω X, Z γραμμικοί χώροι με νόρμα και υποθέτουμε ότι ο Z έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω Y γραμμικός υπόχωρος του X και $T : Y \to Z$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T επεκτείνεται σε φραγμένο γραμμικό τελεστή $\tilde{T} : X \to Z$.[1]

(**6**) Έστω X χώρος με νόρμα, (x_n) ακολουθία στοιχείων του X (όχι υποχρεωτικά ανεξάρτητα), και (λ_n) ακολουθία πραγματικών. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ και για κάθε ακολουθία πραγματικών (a_n) έχουμε

$$\Big|\sum_{n \in A} a_n \lambda_n\Big| \leq C \left\|\sum_{n \in A} a_n x_n\right\|$$

(ii) Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_n) = \lambda_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

---

[1] Σε αντίθεση με την περίπτωση των γραμμικών συναρτησοειδών (όταν δηλαδή $Z = \mathbb{R}$), δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ ακόμη και αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση. Επίσης, αν Z απειροδιάστατος, δεν έχουμε πάντα φραγμένη επέκταση, πχ μπορεί να δειχθεί ότι ο ταυτοτικός τελεστής $T : c_0 \to c_0$ **δεν** μπορεί να επεκταθεί σε φραγμένο γραμμικό τελεστή $\tilde{T} : \ell^\infty \to c_0$.