ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2026
Παράδοση: Πέμπτη 19 Μαΐου.

(**1**) Έστω H διαχωρίσιμος χώρος *Hilbert* με ορθοκανονική βάση (e_n).

(*i*) Έστω $T\colon H \to H$ φραγμένος γ.τ. ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$. Δείξτε ότι για κάθε άλλη ορθοκανονική βάση (u_n) ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|^2 < +\infty$$

(*ii*) Δείξτε ότι υπάρχει μη φραγμένος γ.τ. $T\colon H \to H$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$.

(**2**) Έστω X χώρος *Banach* και $T\colon X \to X$ φραγμένος γ.τ.. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > \|T\|$ ο τελεστής $T - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος και $\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$.

(**3**) Έστω H χώρος *Hilbert* και $T\colon H \to H$ συμπαγής τελεστής.

(*i*) Δείξτε ότι ο τελεστής T^* είναι συμπαγής (υποθέστε για διευκόλυνση ότι είναι φυσιολογικός).

(*ii*) Δείξτε ότι ο τελεστής T^*T είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής.

(**4**) Έστω H χώρος *Hilbert*, (e_n) και (u_n) ορθοκανονικά σύνολα, και (a_n) ακολουθία πραγματικών με $a_n \to 0$. Δείξτε ότι ο τελεστής

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle \, u_n, \quad x \in X,$$

είναι καλά ορισμένος και συμπαγής.

(**5**) Έστω H διαχωρίσιμος χώρος *Hilbert* και $T\colon H \to H$ συμπαγής τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχουν ορθοκανονικά σύνολα (e_n) και (u_n), και ακολουθία πραγματικών (a_n) με $a_n \to 0$, ώστε

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle \, u_n, \quad x \in X.$$

(*Υπόδειξη.* Δείξτε ότι ο T^*T έχει ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

(**6**) Έστω H χώρος *Hilbert* και $T\colon H \to H$ συμπαγής τελεστής. Δείξτε ότι αν $x_n \to^{w} x$ τότε $Tx_n \to^{\|\cdot\|} Tx$. Συμπεράνετε ότι αν (e_n) ορθοκανονική ακολουθία, τότε $Te_n \to^{\|\cdot\|} 0$.
