

(1) Έστω μ το μέτρο *Lebesgue* στο $[0, 1]$ και $Y = \{f \in L^1(\mu) : \int_0^1 xf(x) dx = 0\}$.

(i) Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του $L^1(\mu)$.

(ii) Δείξτε ότι $\|f - 1\|_{L^1(\mu)} > \frac{1}{2}$ για κάθε $f \in Y$.

(iii) Δείξτε ότι $d(1, Y) = \frac{1}{2}$. (Υπόδειξη. $f_n = 1 - \frac{n^2}{2n-1} \cdot \mathbf{1}_{[1-\frac{1}{n}, 1]}$)

(2) (i) Έστω $f_n \in C[0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \rightarrow^w 0$ αν και μόνο αν $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

(ii) Έστω $x_n = (\xi_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_1$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $x_n \rightarrow^{w^*} 0$ αν και μόνο αν $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_1 < \infty$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{nk} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(3) Έστω X χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$.

(i) Εάν $x_n \rightarrow^w 0$, δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου κάθε y_n είναι πεπερασμένος κυρτός συνδυασμός των x_n , $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\|y_n\| \rightarrow 0$.

(ii) Έστω X αυτοπαθής και $\|\cdot\|'$ μία άλλη νόρμα στον X τέτοια ώστε $\|x\|' \leq \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι εάν $\|x_n\| \leq 1$ και $\|x_n\|' \rightarrow 0$ τότε $f(x_n) \rightarrow 0$ για κάθε f φραγμένο γ.σ. στον $(X, \|\cdot\|)$.

(4) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η απεικόνιση $x \mapsto \|x\|$ δεν είναι w -συνεχής σε κανένα σημείο του X . Ψάχνει απειροδιάστατος χώρος στον οποίο είναι ακολουθιακά συνεχής;

(5) (i) Για $k \in \mathbb{N}$, έστω $x_k = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, όπου έχουμε k μηδενικά. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, δείξτε ότι $x_k \rightarrow^{w^*} 0$. Ισχύει ότι $x_k \rightarrow^w 0$;

(ii) Είναι σωστό ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο με εσωτερικό γινόμενο η ασθενής ακολουθιακή κλειστότητα της μοναδιαίας σφαίρας είναι η μοναδιαία μπάλλα;

(6) Έστω λ το μέτρο *Lebesgue* στο $[0, 1]$.

(i) Δείξτε ότι

$$\mu_n = \frac{\delta_0 + \delta_{\frac{1}{n}} + \dots + \delta_{\frac{n-1}{n}}}{n} \rightarrow^{w^*} \lambda.$$

(ii) Αν α άρρητος δείξτε ότι $(\{t\})$ είναι το κλασματικό μέρος του t

$$\nu_n = \frac{\delta_0 + \delta_{\{\alpha\}} + \dots + \delta_{\{(n-1)\alpha\}}}{n} \rightarrow^{w^*} \lambda.$$

(iii) Δείξτε ότι οι ακολουθίες $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν έχουν ασθενώς συγκλίνουσες υποακολουθίες.
