ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

Πρόοδος-Εαρινό εξάμηνο 2026

Διάρκεια 4 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (5 Μονάδες) Στα παρακάτω δώστε απάντηση ΝΑΙ/ΟΧΙ και σύντομη αιτιολόγηση.

(*i*) Υπάρχει γραμμικός χώρος στον οποίο καμία νόρμα δεν είναι πλήρης.

(*ii*) Υπάρχουν γραμμικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης X_n, $n \in \mathbb{N}$, τέτοιοι ώστε $c_0 = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$.

(*iii*) Υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $\ell^\infty(\mathbb{N})$ το οποίο είναι μηδέν στον c_{00} και παίρνει την τιμή 1 στην ακολουθία $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(*iv*) Υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $\ell^\infty(\mathbb{N})$ το οποίο είναι μηδέν στον c_0 και παίρνει την τιμή 1 στην ακολουθία $(1+1/n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(*v*) Υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $F\colon B[0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$ για κάθε $f \in C[0,1]$.

(*vi*) Ο τελεστής $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ με τύπο $T((\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (c_k\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένος αν και μόνο αν η $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

(*vii*) Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε πολυώνυμο $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ βαθμού το πολύ 2026 ισχύει $\|p + p'\|_\infty \leq C\,\|p - p'\|_\infty$.

(**2**) (2 Μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(*ii*) Δείξτε ότι υπάρχει $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\limsup_{x\to a} f(x) = +\infty$ και $\liminf_{x\to a} f(x) = -\infty$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(**3**) (2 Μονάδες) (*i*) Έστω $\|\cdot\|$ πλήρης νόρμα στον $C[0,1]$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]. \tag{1}$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$.

(*ii*) Δείξτε ότι υπάρχει νόρμα στον $C[0,1]$ η οποία ικανοποιεί την (1) και δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$.

(**4**) (2 Μονάδες) Έστω X πλήρης χώρος με νόρμα και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $y \in Y, z \in Z$ τέτοια ώστε $x = y + z$. Δείξτε ότι η προβολή $P_Y\colon X \to Y$ με τύπο $P_Y(x) = y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.
