ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2 (1/10/10)

Να μου επιστρέψετε τις ασκήσεις 3, 4, 5, 6, 8, μέχρι την Παρασκευή 8 Οκτωβρίου.

Δώρο: +1 μονάδα (από σύνολο 100 του τελικού σας βαθμού) για την άσκηση 9. Μπορείτε να την φέρετε μέχρι τις 10 Δεκεμβρίου.

(**1**) (**i**) Έαν A είναι οι ρητοί στο $[0,1]$ και B οι άρρητοι στο $[1,2]$, δείξτε ότι το σύνολο $A\cup B$ είναι *Borel* αλλά δεν είναι G_δ ούτε F_σ.

(**ii**) Είναι σωστό ότι κάθε *Borel* υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ διαφέρει απο κάποιο F_σ σε σύνολο μέτρου 0;

(**2**) Έστω E υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο E' με $E\subset E'$ και $m_*(E'\setminus E)\le \varepsilon$. Είναι το E υποχρεωτικά μετρήσιμο;

(**3**)* Να δειχθεί ότι ένα υποσύνολο E του $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο O του $\mathbb{R}^d$ έχουμε

$$m(O) = m_*(O\cap E) + m_*(O\cap E^c).$$

(Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $m_*(E) < \infty$.)

(**4**)* Έστω E το σύνολο των πραγματικών αριθμών οι οποίοι δεν περιέχουν το ψηφίο 9 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Δείξτε οτι το E είναι μετρήσιμο και υπολογίστε το μέτρο του.

(**5**)* Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $m(E) = 1$. Υπάρχει πάντα μετρήσιμο $E'\subset E$ με $m(E') = 1/3$; Υπάρχει πάντα συμπαγές $K\subset E$ με $m(K) = 1/3$;

(**6**)* (**i**) Έστω $E\subset \mathbb{R}$ με $m_*(E) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda\in(0,1)$ υπάρχει (μη τετριμμένο) διάστημα I τέτοιο ώστε $m_*(E\cap I)\ge \lambda\cdot m_*(I)$.

(**ii**) Έστω A, B μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με θετικό μέτρο. Να δειχθεί οτι το σύνολο $A+B = \{a+b\colon a\in A, b\in B\}$ περιέχει κάποιο (μη τετριμμένο) διάστημα.

Υπόδειξη: Κάντε χρήση του (i) για λ κοντά στο 1.

(7) **(i)** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κατασκευάστε ανοιχτό $O_n \subset [0,1]$ το οποίο περιέχει τους ρητούς και $m(O_n) \leq 1/n$.

(ii) Εάν $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, δείξτε ότι $m(A) = 0$ και ότι το σύνολο $B = [0,1] \setminus A$ είναι πρώτης κατηγορίας (δηλαδή μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων που δεν περιέχουν κανένα μη τετριμμένο διάστημα.). Συμπεράνετε ότι το $[0,1]$ είναι ένωση δύο 'μικρών' συνόλων.

(8)* **(i)** Να δειχθεί ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στέλνει F_σ σύνολα σε F_σ σύνολα.

(ii) Να δειχθεί ότι κάθε *Lipschitz* συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στέλνει σύνολα μέτρου 0 σε σύνολα μέτρου 0.

(iii) Να δειχθεί ότι κάθε *Lipschitz* συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στέλνει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

(9)$^\spadesuit$ Κατασκευάστε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$ τέτοιο ώστε για κάθε μη τετριμμένο διάστημα $I \subset [0,1]$ έχουμε $m(I \cap E) > 0$ και $m(I \cap E^c) > 0$.
Υπόδειξη: Ξεκινήστε με ένα σύνολο C_δ τύπου *Cantor* (άσκηση 8 του πρώτου φυλλαδίου) για κάποιο $\delta \in (0,1)$. Σε κάθε διάστημα έξω απο το C_δ βάλτε κάποια άλλα σύνολα παρόμοιου τύπου. Συνεχίστε έτσι...