ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8 (14/1/11)

Να μου επιστρέφετε μέχρι την Πέμπτη 27 Ιανουαρίου τις παρακάτω ασκήσεις.

Δώρο: +1 μονάδα (από σύνολο 100 του τελικού σας βαθμού) για το δεύτερο μέρος της 8 και για την 10.

(**1**) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $f^* \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

(**2**) Έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη ($\int_B |f(x)|dx < +\infty$ για κάθε μπάλα B).
(**i**) Δείξτε ότι το θεώρημα διαφόρισης του *Lebesgue* ισχύει για την f.
(Δηλαδή δείξτε ότι $\lim_{m_{\mathbb{R}}(B)\to 0, x\in B} \frac{\int_B f\ dx}{m_{\mathbb{R}}(B)} = f(x)$ σχεδόν παντού.)
(**ii**) Είναι σωστό ότι $f^*(x) < +\infty$ σχεδόν παντού;

(**3**) Έστω μ ένα τοπικά πεπερασμένο μέτρο *Borel* στον $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mu \ll m_{\mathbb{R}}$ και $m_{\mathbb{R}} \ll \mu$. Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα *Borel* E έχουμε

$$\lim_{m_{\mathbb{R}}(B)\to 0, x\in B} \frac{\mu(E\cap B)}{\mu(B)} = \mathbf{1}_E(x)$$

σχεδόν παντού ως προς το μ (δηλαδή για όλα τα x έξω από ένα σύνολο με μ-μέτρο 0).
Υπόδειξη: Αρχικά κάντε χρήση του θεωρήματος *Radon-Nikodym*.

(**4**) (**i**) Εάν E είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ δείξτε ότι για κάθε $r > 0$ η συνάρτηση $f_r(x) = m_*(E \cap B(x,r))$ είναι συνεχής.
Υπόδειξη: Η άσκηση 3 από το Φυλλάδιο 6 θα σας φανεί χρήσιμη.
(**ii**) Δίνεται ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}^d$ για το οποίο ισχύει

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m_*(E\cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = \mathbf{1}_E(x)$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο.

(**5**) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $m_{\mathbb{R}}(E) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (s_n) τέτοια ώστε $m_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(E + s_n)) = 0$.
Υπόδειξη: Δεδομένου $\varepsilon > 0$ χρησιμοποιήστε κάποιο σημείο πυκνότητας του E για να βρείτε $(s_{\varepsilon,n})$ τέτοια ώστε $m_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(E + s_{\varepsilon,n})) \leq \varepsilon$.

(**6**) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a > 0$, είναι απόλυτα συνεχής σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $(0, \infty)$. Για ποιά a είναι απόλυτα συνεχής στο $(0, \infty)$;

(**7**) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα, απόλυτα συνεχής, και σχεδόν παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon [0,1] \to [0,1]$, τέτοια ώστε

$$m_{\mathbb{R}}(\{x\colon f'(x) = 0\} \cap I) > 0$$

για κάθε (μη τετριμμένο) διάστημα $I \subset [0,1]$.
Υπόδειξη: $f(x) = m_{\mathbb{R}}(E \cap [0,x])$ όπου E το σύνολο της άσκησης 9 από το Φυλλάδιο 2.

(**8**) (**i**) Δείξτε ότι κάθε απόλυτα συνεχής συνάρτηση στέλνει σύνολα μέτρου 0 σε σύνολα μέτρου 0 και μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

(**9**) Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο *Borel* στο $[0,1]$. Δείξτε ότι $\mu \ll m_{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν η συνάρτηση $f(x) = \mu([0,x])$ είναι απόλυτα συνεχής στο $[0,1]$.

(**10**)$^{\spadesuit}$ Δείξτε ότι κάθε ένωση (όχι υποχρεωτικά αριθμήσιμη) κλειστών μπαλών στον $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο σύνολο.