ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

Τελικό Διαγώνισμα-Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διάρκεια: 4 ώρες
Καλή Επιτυχία!

(**1**) (2 Μονάδες) Απαντήστε ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ και δώστε μία σύντομη επεξήγηση (2-3 σειρές).

(i) Κάθε συνεχής συνάρτηση στέλνει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

(ii) Υπάρχει $f \in C(\mathbb{R})$ ώστε $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ και για κάθε $p > 0$ έχουμε $\int |f|^p \, dx = +\infty$.

(iii) Εάν μ, ν *Borel* μέτρα στο $\mathbb{R}$ και $\mu \ll \nu$, τότε υπάρχει $C > 0$ ώστε $\mu \leq C\nu$.

(iv) Εάν η $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής, σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, και $|f'(x)| \leq 1$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι Lip-συνεχής.

(**2**) (1.5 Μονάδες) (i) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι το σύνολο των $x \in X$ για τα οποία το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει στο $[-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Έστω $f_n \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)$ υπάρχει στο $[-\infty, +\infty]$ σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)$ υπάρχει στο $[-\infty, +\infty]$ σχεδόν για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(**3**) (1.5 Μονάδες) Έστω $f, g \in L^2(m_{\mathbb{R}})$. Δείξτε ότι η συνέλιξη $(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$, $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ορίζει φραγμένη και συνεχή συνάρτηση.

(**4**) (1.5 Μονάδες) (i) Έστω μ *Borel* μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσες φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι $\int f \cdot g \, d\mu \geq \int f \, d\mu \cdot \int g \, d\mu$.
(Υπόδειξη: $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$.)

(ii) Εάν (a_n), (b_n) αύξουσες ακολουθίες, δείξτε ότι $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N a_n \, b_n \geq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N a_n \cdot \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N b_n$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

(**5**) (2 Μονάδες) (i) Έστω μ, ν φραγμένα μέτρα *Borel* στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει σύνολο *Borel* A τέτοιο ώστε $\mu(E) \geq 2019\, \nu(E)$ για κάθε *Borel* $E \subset A$ και $\mu(E) \leq 2019\, \nu(E)$ για κάθε *Borel* $E \subset \mathbb{R} \setminus A$.

(ii) Έστω μ, ν φραγμένα μέτρα *Borel* στο $[0,1]$. Εάν $\int_0^1 x^n \, d\mu = \int_0^1 x^n \, d\nu$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$, δείξτε ότι $\mu = \nu$.

(**6**) (1.5 Μονάδες) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $0 < m_{\mathbb{R}}(E) < +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $\ell_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\ell \in (0, \ell_0)$ υπάρχει διάστημα I μήκους ℓ ώστε $m_{\mathbb{R}}(I \cap E) = \frac{1}{2}\, m_{\mathbb{R}}(I)$

(**7**) (1.5 Μονάδες) Κατασκευάστε $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα, σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, όμως η παράγωγος της μηδενίζεται σε σύνολο θετικού μέτρου.
