ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Παράδοση: Παρασκευή 21 Δεκεμβρίου (κάθε μέρα καθυστέρησης -10%).
Παραδώστε τις ασκήσεις 2, 5, 6, 7, 8 και όσοι μπορούν την 4 ή/και την 9.

(**1**) Έστω $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ μέτρο *Borel*. Να δειχθεί ότι υπάρχει *Borel* σύνολο A τέτοιο ώστε $\mu(E) \geq m_{\mathbb{R}}(E)$ για κάθε *Borel* $E \subset A$ και $\mu(E) \leq m_{\mathbb{R}}(E)$ για κάθε *Borel* $E \subset \mathbb{R} \setminus A$.

(**2**) Έστω $f\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ η συνάρτηση που ορίσαμε στην Άσκηση 9 (*iii*) του Φυλλαδίου 4, $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα των *Lebesgue* μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$, και $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ το μέτρο με τύπο

$$\mu(E) = \int_E f^2 \, dx.$$

Να δειχθεί ότι (*i*) το μ είναι σ-πεπερασμένο, (*ii*) $\mu \ll m_{[0,1]}$, όμως (*iii*) $\mu(I) = +\infty$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα $I \subset [0,1]$.

(**3**) Έστω μ, ν μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με

$$\mu(A) + \nu(A^c) \leq \varepsilon.$$

Να δειχθεί ότι $\mu \perp \nu$.

(**4**)$^{\spadesuit}$ (**i**) Για $t \in (0,1)$ έστω μ_t το μέτρο *Bernoulli* με παραμέτρους $(t, 1-t)$ στον $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Δείξτε ότι τα μέτρα μ_t, $t \in (0,1)$, είναι συνεχή και $\mu_t \perp \mu_s$ για κάθε $t, s \in (0,1)$ με $t \neq s$.

Υπόδειξη: Αρχικά δείξτε ότι εάν $f \in L^1(\mu_t)$ και $f(Tx) = f(x)$ σχεδόν παντού ως προς το μ_t (όπου T ο μετασχηματισμός μεταφοράς στο X), τότε η f είναι μ_t σχεδόν παντού σταθερή.

(**ii**) Για $t \in (0,1)$ κατασκευάστε συνεχή *Borel* μέτρα πιθανότητας μ_t στο $(0,1)$, τέτοια ώστε $\mu_t \perp \mu_s$ για κάθε $t, s \in (0,1)$ με $t \neq s$ και το $\mu_{\frac{1}{2}}$ είναι το μέτρο *Lebesgue* στο $(0,1)$.

(**5**) Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ με $\mu(X) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν στον $(X, \mathcal{A})$ τέτοιο ώστε $\mu \ll \nu$ και $\nu \ll \mu$.

(**6**) Έστω ότι τα μ_i, $i \in \mathbb{N}$, είναι σ-πεπερασμένα μέτρα *Borel* στο μετρικό χώρο (X, d) και $f\colon X \to \mathbb{R}$ *Borel* μετρήσιμη συνάρτηση.

(**i**) Δείξτε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f_n \in C(X), n \in \mathbb{N}$, (ανεξάρτητες από το $i \in \mathbb{N}$) τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού ως προς το μ_i για όλα τα $i \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Υποθέστε αρχικά ότι τα μ_i είναι μέτρα πιθανότητας.

(**ii**) Εάν επιπλέον τα μέτρα μ_i είναι πεπερασμένα και $f \in L^1(\mu_i)$ για όλα τα $i \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f_n \in C(X), n \in \mathbb{N}$, ώστε $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu_i = 0$ για όλα τα $i \in \mathbb{N}$.

(**7**) Έστω $\phi\colon [a,b] \to [c,d]$ επί, *Borel* μετρήσιμη, και τέτοια ώστε $m_{\mathbb{R}}(\phi(Z)) = 0$ εάν $m_{\mathbb{R}}(Z) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική, *Borel* μετρήσιμη συνάρτηση $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $f \in L^1([c,d])$ *Borel* μετρήσιμη, έχουμε $(f \circ \phi) \cdot w \in L^1([a,b])$ και

$$\int_c^d f(y)\, dy = \int_a^b (f \circ \phi)(x) \cdot w(x)\, dx.$$

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι για το μέτρο ν με τύπο $\nu(E) = m_{\mathbb{R}}(\phi^{-1}(E))$ ισχύει $m_{\mathbb{R}} \ll \nu$.

(**8**) Έστω μ_1, μ_2 πραγματικά προσημασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ με φραγμένη κύμανση. Ορίζουμε το μιγαδικό μέτρο $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ και την κύμανση του $|\mu|$ με τύπο

$$|\mu|(E) = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \colon E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Big\}$$

όπου το sup το παίρνουμε ως προς όλες τις διαμερίσεις του E στα $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$.

(**i**) Δείξτε ότι το $|\mu|$ είναι μέτρο.

(**ii**) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη $\theta\colon X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $d\mu = e^{i\theta} d|\mu|$.

(**9**)♠ Έστω μ μιγαδικό μέτρο όπως στην προηγούμενη άσκηση και $E \in \mathcal{A}$. Δείξτε ότι υπάρχει $A \in \mathcal{A}$, υποσύνολο του E, τέτοιο ώστε

$$|\mu(A)| \geq \frac{1}{\pi} |\mu|(E).$$

(Η σταθερά $\frac{1}{\pi}$ δεν μπορεί να βελτιωθεί, αν θέλετε δείξτε το και αυτό.)

Υπόδειξη: Εάν $d\mu = e^{i\theta} d|\mu|$, τότε $|\mu(E_\alpha)| \geq \int_{E_\alpha} \cos(\theta(x) - \alpha)\, d|\mu|(x)$ όπου $E_\alpha = \{x \in E \colon \cos(\theta(x) - \alpha) > 0\}$.
