

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2022

Παράδοση: Πέμπτη 8 Δεκεμβρίου.

Παραδώστε τις ασκήσεις 2, 5, 6, 7, 8 και όσοι μπορούν την 10 αλλιώς την 9.

(1) Έστω  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $p \in [1, +\infty)$ , και  $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$  με  $\|K\|_{L^1} = 1$ . Για  $\varepsilon > 0$  θέτουμε  $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}K(x/\varepsilon)$ . Δείξτε ότι  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - f * K_\varepsilon\|_{L^p} = 0$ . Δείξτε επίσης ότι δεν ισχύει το ίδιο για  $p = +\infty$ .

(2) (i) Εάν  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  και  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  θέτουμε  $(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) dy$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ . Δείξτε ότι η  $f * g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής.

(ii) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση  $e \in L^1(\mathbb{R}^d)$  τέτοια ώστε  $f * e = f$  σχεδόν παντού για κάθε  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .

(3) Εάν  $X$  είναι μη κενό σύνολο, ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση  $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  με τύπο  $\mu(E) = |E|$  όπου  $|E|$  είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $E$ . Δείξτε ότι το  $\mu$  είναι μέτρο, και ότι το  $\mu$  είναι  $\sigma$ -πεπερασμένο αν και μόνο αν το σύνολο  $X$  είναι αριθμήσιμο.

(4) Έστω  $m_*$  το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον  $\mathbb{R}^d$  και  $E$  Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^d$ . Δείξτε ότι για κάθε  $A \subset \mathbb{R}^d$  (όχι υποχρεωτικά μετρήσιμο) έχουμε

$$m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c).$$

(Κατά συνέπεια, κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^d$  είναι  $m_*$ -μετρήσιμο κατά Καραθεοδωρή. Επίσης και το αντίστροφο είναι σωστό, δες άσκηση 3 στο φυλλάδιο 2.)

(5) Έστω  $\mathcal{A}_0$  άλγεβρα υποσυνόλων του χώρου  $X$ . Έστω  $\mu$  μέτρο στην  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$  το οποίο είναι  $\sigma$ -πεπερασμένο στην  $\mathcal{A}_0$ . Δείξτε ότι για κάθε  $E \in \mathcal{A}$  με  $\mu(E) < +\infty$  και για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $R \in \mathcal{A}_0$  ώστε  $\mu(E \Delta R) \leq \varepsilon$ .

(6) Έστω  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ ,  $\mathcal{A}$  η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από τα κυλινδρικά σύνολα, και  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  το μέτρο Bernoulli που ορίσαμε στο μάθημα. Έστω επίσης  $T: X \rightarrow X$  μετασχηματισμός με τύπο  $T((x(n))_{n \in \mathbb{Z}}) = (x(n+1))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

(i) Δείξτε ότι εάν  $A \in \mathcal{A}$  τότε  $TA \in \mathcal{A}$  και  $\mu(TA) = \mu(A)$ .

**Υπόδειξη:** Δείξτε πρώτα ότι το ζητούμενο ισχύει όταν το  $A$  είναι κυλινδρικό σύνολο.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε  $A, B \in \mathcal{A}$  έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^n B) = \mu(A) \cdot \mu(B) \quad (T^n = T \circ T \circ \dots \circ T).$$

**Υπόδειξη:** Δείξτε πρώτα ότι το ζητούμενο ισχύει όταν τα  $A, B$  είναι κυλινδρικά σύνολα.

(7) Έστω  $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, 1]$  ένα μέτρο όπου  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  είναι η  $\sigma$ -άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του  $\mathbb{R}^d$ . Δείξτε ότι υπάρχει διακριτό μέτρο  $\mu_1$  (δηλαδή  $\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}$  για κάποια  $x_n \in \mathbb{R}^d$ ,  $a_n \in \mathbb{R}_+$ ) και συνεχές μέτρο  $\mu_2$  (δηλαδή  $\mu_2(\{x\}) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^d$ ) έτσι ώστε  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ .

(8) Έστω  $\mu: \mathcal{B}([0, 1]) \rightarrow [0, 1]$  ένα μέτρο όπου  $\mathcal{B}([0, 1])$  είναι η  $\sigma$ -άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του  $[0, 1]$ . Ορίζουμε  $\hat{\mu}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} d\mu(t)$ .<sup>1</sup>

(i) Εάν  $x \in [0, 1]$  δείξτε ότι

$$\mu(\{x\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n x} \hat{\mu}(n).$$

(ii) Δείξτε ότι το μέτρο  $\mu$  είναι συνεχές (δηλαδή  $\mu(\{x\}) = 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ ) αν και μόνο αν

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\hat{\mu}(n)|^2 = 0.$$

**Υπόδειξη:** Δείξτε πρώτα ότι  $|\hat{\mu}(n)|^2 = \int_0^1 \int_0^1 e^{-2\pi i n(t-s)} d\mu(t) d\mu(s)$ .

(9) Εάν  $\Lambda \subset \mathbb{Z}$  ορίζουμε  $\bar{d}(\Lambda) = \limsup_{N \rightarrow \infty} |\Lambda \cap [1, N]|/N$ . Δείξτε ότι υπάρχει χώρος με μέτρο  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\mu(X) = 1$ , αντιστρέψιμος μετασχηματισμός  $T: X \rightarrow X$  που διατηρεί το  $\mu$  (δηλαδή  $\mu(TA) = \mu(A)$  για κάθε  $A \in \mathcal{A}$ ), και  $A \in \mathcal{A}$ , τέτοιο ώστε  $\mu(A) = \bar{d}(\Lambda)$  και

$$\bar{d}(\Lambda \cap (\Lambda + n_1) \cap \dots \cap (\Lambda + n_\ell)) \geq \mu(A \cap T^{n_1} A \cap \dots \cap T^{n_\ell} A)$$

για κάθε  $\ell \in \mathbb{N}$ , και  $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{Z}$ .

**Υπόδειξη:** Υποθέστε πρώτα ότι όλα τα  $\limsup$  που σας εμφανίζονται είναι κανονικά όρια. Πάρτε  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ ,  $A = \{x \in X: x(0) = 1\}$ ,  $T$  όπως στην άσκηση (6), ορίστε το μέτρο  $\mu$  κατάλληλα στα κυλινδρικά σύνολα, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή-Κολμογορού για να επεκτείνετε το  $\mu$  στην  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από τα κυλινδρικά σύνολα. Σε αυτήν την περίπτωση η ζητούμενη ανισότητα είναι ισότητα.

(10) Έστω  $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  μετρήσιμη.

(i) Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cdot f(x, z) dx dy dz \geq \left( \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \right)^2.$$

(ii)<sup>♠</sup> Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cdot f(x, w) \cdot f(z, y) dx dy dz dw \geq \left( \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \right)^3.$$

<sup>1</sup> Αυτό ισούται με  $\int_0^1 \cos(2\pi n t) d\mu(t) - i \int_0^1 \sin(2\pi n t) d\mu(t)$ , αλλά δεν θα σας χρειαστεί αυτή η ισότητα.