

Παραδώστε τις ασκήσεις 2, 5, 6, 7, 8 και όσοι μπορούν την 4 ή/και την 9.

(1) Έστω $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ μέτρο Borel. Ναδειχθεί ότι υπάρχει Borel σύνολο A τέτοιο ώστε $\mu(E) \geq m_{\mathbb{R}}(E)$ για κάθε Borel $E \subset A$ και $\mu(E) \leq m_{\mathbb{R}}(E)$ για κάθε Borel $E \subset \mathbb{R} \setminus A$.

(2) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ η συνάρτηση που ορίσαμε στην Άσκηση 9 (iii) του Φυλλαδίου 4, \mathcal{A} η σ -άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$, και $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ το μέτρο με τύπο

$$\mu(E) = \int_E f^2 dx.$$

Ναδειχθεί ότι (i) το μ είναι σ -πεπερασμένο, (ii) $\mu \ll m_{[0,1]}$, όμως (iii) $\mu(I) = +\infty$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα $I \subset [0, 1]$.

(3) Έστω μ, ν μέτρα στον (X, \mathcal{A}) τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με

$$\mu(A) + \nu(A^c) \leq \varepsilon.$$

Ναδειχθεί ότι $\mu \perp \nu$.

(4)[♦] (i) Για $t \in (0, 1)$ έστω μ_t το μέτρο Bernoulli με παραμέτρους $(t, 1-t)$ στον $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Δείξτε ότι τα μέτρα $\mu_t, t \in (0, 1)$, είναι συνεχή και $\mu_t \perp \mu_s$ για κάθε $t, s \in (0, 1)$ με $t \neq s$.

Υπόδειξη: Αρχικά δείξτε ότι εάν $f \in L^1(\mu_t)$ και $f(Tx) = f(x)$ σχεδόν παντού ως προς το μ_t (όπου T ο μετασχηματισμός μεταφοράς στο X), τότε η f είναι μ_t σχεδόν παντού σταθερή.

(ii) Για $t \in (0, 1)$ κατασκευάστε συνεχή Borel μέτρα πιθανότητας μ_t στο $(0, 1)$, τέτοια ώστε $\mu_t \perp \mu_s$ για κάθε $t, s \in (0, 1)$ με $t \neq s$ και το $\mu_{\frac{1}{2}}$ είναι το μέτρο Lebesgue στο $(0, 1)$.

(5) Έστω μ ένα σ -πεπερασμένο μέτρο στον (X, \mathcal{A}) με $\mu(X) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν στον (X, \mathcal{A}) τέτοιο ώστε $\mu \ll \nu$ και $\nu \ll \mu$.

(6) Έστω ότι τα $\mu_i, i \in \mathbb{N}$, είναι σ -πεπερασμένα μέτρα Borel στο μετρικό χώρο (X, d) και $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

(i) Δείξτε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f_n \in C(X), n \in \mathbb{N}$, (ανεξάρτητες από το $i \in \mathbb{N}$) τέτοιες ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ σχεδόν παντού ως προς το μ_i για όλα τα $i \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Υποθέστε αρχικά ότι τα μ_i είναι μέτρα πιθανότητας.

(ii) Εάν επιπλέον τα μέτρα μ_i είναι πεπερασμένα και $f \in L^1(\mu_i)$ για όλα τα $i \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f_n \in C(X), n \in \mathbb{N}$, ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu_i = 0$ για όλα τα $i \in \mathbb{N}$.

(7) Έστω $\phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ επί, Borel μετρήσιμη, και τέτοια ώστε $m_{\mathbb{R}}(\phi(Z)) = 0$ εάν $m_{\mathbb{R}}(Z) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική, Borel μετρήσιμη συνάρτηση $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $f \in L^1([c, d])$ Borel μετρήσιμη, έχουμε $(f \circ \phi) \cdot w \in L^1([a, b])$ και

$$\int_c^d f(y) dy = \int_a^b (f \circ \phi)(x) \cdot w(x) dx.$$

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι για το μέτρο ν με τύπο $\nu(E) = m_{\mathbb{R}}(\phi^{-1}(E))$ ισχύει $m_{\mathbb{R}} \ll \nu$.

(8) Έστω μ_1, μ_2 πραγματικά προσημασμένα μέτρα στον (X, \mathcal{A}) με φραγμένη κύμανση. Ορίζουμε το μιγαδικό μέτρο $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ και την κύμανση του $|\mu|$ με τύπο

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| : E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$$

όπου το sup το παίρνουμε ως προς όλες τις διαμερίσεις του E στα $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι το $|\mu|$ είναι μέτρο.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη $\theta: X \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $d\mu = e^{i\theta} d|\mu|$.

(9)[♦] Έστω μ μιγαδικό μέτρο όπως στην προηγούμενη άσκηση και $E \in \mathcal{A}$. Δείξτε ότι υπάρχει $A \in \mathcal{A}$, υποσύνολο του E , τέτοιο ώστε

$$|\mu(A)| \geq \frac{1}{\pi} |\mu|(E).$$

(Η σταθερά $\frac{1}{\pi}$ δεν μπορεί να βελτιωθεί, αν θέλετε δείξτε το και αυτό.)

Υπόδειξη: Εάν $d\mu = e^{i\theta} d|\mu|$, τότε $|\mu(E_\alpha)| \geq \int_{E_\alpha} \cos(\theta(x) - \alpha) d|\mu|(x)$ όπου $E_\alpha = \{x \in E : \cos(\theta(x) - \alpha) > 0\}$.
