ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

Πρόοδος-Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διάρκεια: 3 ώρες
Καλή Επιτυχία!

(**1**) (3 Μονάδες) Απαντήστε ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ και δώστε μία σύντομη επεξήγηση (3-4 σειρές).

(i) Υπάρχει υποσύνολο των άρρητων στο $[0,1]$ το οποίο είναι κλειστό και έχει μέτρο $1/2$.

(ii) Υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $m(E) > 0$ και $m(E \cap (a,b)) < b - a$ για όλα τα a, b με $a < b$.

(iii) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m_*(E \cap [n, n+1]) = a > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $m_*(E) = +\infty$.

(iv) Εάν $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και ταυτίζεται σχεδόν παντού με μία συνεχή συνάρτηση, τότε η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη.

(v) Εάν $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, τότε η f είναι φραγμένη σε κάποιο σύνολο μέτρου 0.99.

(**2**) (2 Μονάδες) (i) Δείξτε ότι δεν υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο τέτοιο ώστε $0 < m(E) < +\infty$ και $m(E \triangle (E+1)) = 0$.

(ii) Υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ (όχι υποχρεωτικά μετρήσιμο) τέτοιο ώστε $0 < m_*(E) < +\infty$ και $m_*(E \triangle (E+1)) = 0$;

(**3**) (2 Μονάδες) Έστω $f\colon [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση *Cantor-Lebesgue* και συνάρτηση $g\colon [0,1] \to [0,2]$ με τύπο $g(x) = x + f(x)$, $x \in [0,1]$.

(i) Εάν C είναι το σύνολο *Cantor*, δείξτε ότι $m(g(C)) = 1$.

(ii) Εαν $h = g^{-1}$ (αιτιολογήστε σύντομα γιατί η g είναι αντιστρέψιμη και η h συνεχής), δείξτε ότι υπάρχει $Z \subset [0,2]$ με $m(Z) = 0$ τέτοιο ώστε το $h^{-1}(Z)$ είναι μη μετρήσιμο.

(**4**) (2 Μονάδες) (i) Έαν $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x+n)$$

συγκλίνει σχεδόν παντού. (Δείξτε το πρώτα για $x \in [0,1]$.)

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ συνεχής και ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε η παραπάνω σειρά αποκλίνει για $x = 0$ και $x = 1/2$.

(**5**) (2 Μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.

(i) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{t \to +\infty} \int |f(x+t) - f(x)|\, dx.$$

(ii) Έστω ότι το παραπάνω όριο είναι 0. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για την f;
